

Problemlösen 2015

Begleitmaterial zur Lehrveranstaltung

Timm Grams, www.hs-fulda.de/~grams, Fulda, 07.09.2015 (rev.: 21.09.15)

Inhaltsverzeichnis

Beschreibung der Lehrveranstaltung.....	1
<i>Aus dem Modulhandbuch</i>	1
<i>Vereinbarungen zum Ablauf</i>	1
<i>Die Lektionen</i>	2
<i>Literaturhinweise</i>	2
<i>Verbindungen</i>	3
Aufgaben- und Problemstellungen	3
<i>Übungen</i>	3
Bettelbrief	3
Ziffernmeer.....	3
Milliarde als Produkt.....	3
Brüder.....	4
Mittelsmann	4
Roulette	4
Eine magische Zahl.....	4
Achteck.....	4
Münzen im Stern	4
<i>Projekte</i>	5
<i>Probleme</i>	5
1 Gleichmäßige Approximation	5
2 Das Problem des Handlungsreisenden (Traveling Salesman Problem, TSP)	6

Beschreibung der Lehrveranstaltung

Aus dem Modulhandbuch

Problemlösen (ET540) ist Pflichtveranstaltung (2+0+2) im Masterstudiengang „Systems Design & Production Management“ im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Hochschule Fulda. Lehrinhalte gemäß Modulhandbuch:

- *Grundlegende Heuristiken:* Generalisierung, Spezialisierung, Analogie, Variation, Enumeration, Rückwärtssuche, Teile und herrsche.
- *Traditionelle Heuristiken:* Vollständige und lokale Suche, Backtracking, Lineares Programmieren, Greedy Algorithms, Dynamisches Programmieren, Branch and bound, Simulated annealing.
- *Moderne Heuristiken:* Evolutionäre Algorithmen, Behandlung von Randbedingungen, Parametersteuerung, Mutationsoperatoren, Auswahlverfahren, Neuronale Netze, Back Propagation, Fuzzy Systems.

Vereinbarungen zum Ablauf

Die *Übungen* erledigt jeder Teilnehmer für sich allein. Er trägt also die Verantwortung für die exakte Aufgabedefinition, Auswahl der Methode und die Durchführung. Wie er die Aufgabe erledigt, ob mit Papier und Bleistift, mit einem Tabellenkalkulationsblatt oder einem Java-Programm, ist zunächst seine Sache. Jede Übung wird auf einem Blatt Papier dokumentiert: Ziel, Weg, Ergebnis. Beurteilt wird das Ergebnis dahingehend, ob das selbst gesteckte Lernziel angemessen ist und inwieweit es erreicht wurde. Bei den Denksportaufgaben sollte der

Gedankengang im Zuge der Lösungssuche protokolliert werden (Introspektion), auch dann, wenn eine Lösung nicht gefunden worden ist. Wer in dieser Phase schon irgendwelche Lösungen in Büchern oder im Internet sucht, schadet sich selbst. Nach Rückgabe des kommentierten Dokuments kommt die zweite Phase, in der jeder Teilnehmer das Problem – den Kommentaren folgend – weiter bearbeitet, bis er mit seiner Lösung zufrieden ist. Tipp: Seien Sie nicht zu früh zufrieden. Stellen Sie sich auf den Standpunkt, dass es immer noch einfacher, noch besser geht.

Für die *Projekte* werden Dreiergruppen – ausnahmsweise auch Zweiergruppen – gebildet. Die Programmierung geschieht in der Sprache Java und mit der Entwicklungsumgebung BlueJ. Die Durchführung gliedert sich in die vier Phasen *Analyse* (Ergebnis: *Pflichtenblatt*), *Entwurf*, *Realisierung* und *Abnahme*. Zum Abschluss einer jeden Phase erstellt die Gruppe ein knappes Dokument auf einem Blatt (zwei Seiten), das von allen Mitgliedern der Gruppe zum Zeichen des Einverständnisses vor Eintritt in die nächste Bearbeitungsphase zu unterschreiben ist. Zur Erinnerung: In das Pflichtenblatt gehören unter anderem die Beschreibung der *Produktfunktionen* und der *Bedienoberfläche* sowie (zwingend!) die Auflistung der *Testszenarien* (Eingabedaten und Prognosen). Die Testszenarien sind später die Basis der Abnahme.

Auswahl und Terminierung der Aufgaben werden im Laufe der Lehrveranstaltung bekannt gegeben. Die Dokumente zu den Übungen und Projekten sind bei den abschließenden Fachgesprächen vorzulegen. Im Fachgespräch werden jeweils die gesamten Lösungsprozesse bewertet.

Die Lektionen

1. Zur Lehrveranstaltung. Vom Wesen der Ingenieursarbeit. Die Bienenwabe¹. Probleme zum Einstieg. Puzzle-based Learning. Die Es-geht-einfacher-Heuristik.
2. Klassische Optimierungsverfahren: Steilster Anstieg. Direkte Suche (Hooke-Jeeves). Mutations-Selektions-Verfahren (Rechenberg). Simulated Annealing.
3. Problemtypen: SAT (Satisfiability), NLP (Nichtlineare Programmierung), TSP (Traveling Salesman Problem).
4. Präsentationen
5. Grundlegende Heuristiken: Einbettungsprinzip. Time-Warp-Algorithmus. Rendez-vous-Probleme.
6. Klassische Verfahren: Dynamische Optimierung.
7. Moderne Heuristiken: Evolutionsverfahren. Ein Musterprojekt: KoopEgo. Differential Evolution (DE).
8. Präsentationen
9. Das Drei-Farben-Problem. Ein Musterprojekt vom SAT-Typ.
10. Fabrikplanung. Ein Musterprojekt vom TSP-Typ.
11. Fahrweisensteuerung. Ein Musterprojekt vom NLP-Typ.
12. Präsentationen und Fachgespräche

Literaturhinweise

- Aho, Alfred V.; Hopcroft, John E.; Ullman, Jeffrey D.: Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983
- Hemme, Heinrich: Die Kunst, mit möglichst wenig Wachsverbrauch jeder Bienenlarve eine Zelle bereitzustellen, raumfüllende Polyeder und die Ästhetik der optimalen Lösung. Mathematische Unterhaltungen. Spektrum der Wissenschaft (1994) 6, 12-16
- Holland, John H.: Genetische Algorithmen. Spektrum der Wissenschaft (1992) 9, 44-51

¹ <http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/Bienenwabe.pdf>

- Hooke, Robert; Jeeves, T. A.: „Direct Search“ Solution of Numerical and Statistical Problems. Journal of the ACM 8 (1961), 212-229
- Lindner, Ulrich: Optimierung von Fahrweisen im spurgeführten Verkehr und deren Umsetzung. Dissertation, genehmigt von der Fakultät V (Verkehrs- und Maschinensysteme) der Technischen Universität Berlin 2004
- Michalewicz, Zbigniew; Fogel, David B.: How to Solve It: Modern Heuristics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000
- Michalewicz, Zbigniew; Michalewicz, Matthew: Puzzle-based Learning: An introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving. 2008
- Neumann, Klaus; Morlock, Martin: Operations Research. Hanser, München, Wien 1993
- Pólya, Georg: Mathematik und plausibles Schließen. 2 Bände. Birkhäuser, Basel 1962/1963
- Popper, Karl R.: Über Wolken und Uhren. Aus: Objektive Erkenntnis – Ein evolutionärer Entwurf. Hamburg 1973, S. 230-282
- Price, Kenneth V.; Storn, Rainer M.; Lampinen, Jouni A.: Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. Springer, Berlin, Heidelberg 2005
- Rechenberg, Ingo: Evolutionsstrategie. Optimierung technischer System nach den Prinzipien der biologischen Evolution. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart-Bad Cannstatt 1973

Verbindungen

www.hs-fulda.de/~grams/Heuristik/Heuristik.htm

<http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2010.pdf>

<http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2011.pdf>

<http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2012.pdf>

<http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2013.pdf>

<http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2014.pdf>

Aufgaben- und Problemstellungen

Übungen

Welche der Übungen bis zu welchen Terminen zu erledigen sind, wird in der Lehrveranstaltung bekannt gegeben.

Bettelbrief

Der Vater eines Studenten erhält eine Postkarte mit diesem Text

SEND
+MORE
MONEY

und er fragt sich, ob dieser kryptische Text etwas über die Summe aussagt, die sein Sohn sich wünscht.

Ziffernmeer

Die kluge und schöne Cilly Arte
Summiert die Zahlen bis zur Milliarde.
Die Ziffern addiert sie.
Die Nerven verliert sie.
Eilt ihr zu Hilfe und gewinnt die Standarte.

Milliarde als Produkt

Zerlegen Sie eine Milliarde in zwei Faktoren, in denen keine Null vorkommt. Gibt es mehrere Lösungen?

Brüder

Die Familie hat zwei Töchter und drei Söhne. Die zwei Mädchen haben je drei Brüder und die drei Jungen haben je zwei Brüder. Die Mädchen haben mehr Brüder als die Jungen. Demnach haben Frauen im Durchschnitt mehr Brüder als Männer – stimmt das?

Mittelsmann

Peter glaubt, dass der 1. FCK mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{8}$ Deutscher Meister wird. Martin hingegen meint, dass der 1. FCK mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ nicht Deutscher Meister wird. Bieten Sie den beiden jeweils eine Wette an, so dass Sie als Mittelsmann auf jeden Fall gewinnen. Peter und Martin nehmen die Wetten an, wenn sie eine positive Gewinnerwartung haben.

Roulette

An einem Roulettetisch werden 200 Runden gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei viermal in Folge erst Schwarz dann Rot auftritt?

Eine magische Zahl

Wählen Sie eine beliebige Zahl, die nicht negativ und kleiner als zehntausend ist. Schreiben Sie diese Zahl mit vier Ziffern, notfalls ergänzen Sie die Zahl um führende Nullen. Stellen Sie aus diesen vier Ziffern durch Umordnen die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl her. Bilden Sie die Differenz der beiden Zahlen. Diese neue Zahl bezeichnen wir als Folgezahl zur zunächst gewählten. Von dieser Zahl bilden wir nach derselben Vorgehensweise erneut die Folgezahl, und damit wieder und wieder. Falls wir mit 7777 starten liefert der Prozess diese Folge

$$7777 \rightarrow 0000 \rightarrow 0000.$$

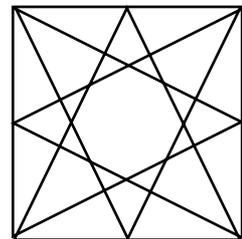
Wir landen also bei der Zahl 0, was weiter kein Wunder ist. Interessant wird es, wenn wir anfangs eine Zahl mit nicht durchweg identischen Ziffern wählen, beispielweise 0021. Dann ergibt sich die Folge

$$0021 \rightarrow 2088 \rightarrow 8532 \rightarrow 6174 \rightarrow 6174 \rightarrow \dots$$

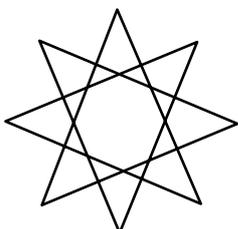
Wir landen bei der Zahl 6174. Und das Sonderbare ist: Egal von welcher der 9990 möglichen Zahlen wir starten, immer wieder ergibt sich 6174. Die Zahl 6174 scheint eine wunderbare magische Anziehungskraft zu besitzen. Mancher Mathematiker hat sich davon narren lassen. Finden Sie des Rätsels Lösung.

Achteck

Verbinden Sie die Mittelpunkte der Seiten eines Quadrats jeweils mit den beiden entfernten Ecken. Dabei entsteht im Inneren des Quadrates ein gleichseitiges Achteck. Wie groß ist die Fläche dieses Achtecks im Verhältnis zur Fläche des Quadrats.



Münzen im Stern



Legen Sie sieben Münzen auf die Spitzen des achtstrahligen Sterns, indem Sie die Münzen nacheinander auf eine freie Spitze legen und sie dann auf einer geraden Verbindungslinie zu einer der beiden so erreichbaren Spitzen bewegen. Dort lassen sie die Münze liegen. Gelingt es ih-

nen, alle sieben Münzen auf diese Weise unterzubringen? Geben Sie das Prinzip an, nach dem Sie vorgehen.

Projekte

Die Aufgabenstellungen der folgenden Projekte sind als Anregungen zu verstehen. Im Pflichtenblatt ist jeweils die konkrete Aufgabe zu formulieren. Dabei sollte der Rahmen nicht zu eng gesteckt werden. Insbesondere sind die Eingabedaten geeignet zu verallgemeinern, so dass sich leicht prüfbare Sonderfälle darstellen lassen und dass die Leistungsgrenzen der Programme ausgelotet werden können.

Liste der Projekte:

1. *Gleichmäßige Approximation (NLP)*. In diesem Projekt ist das erste Problem des folgenden Abschnitts mit klassischen Optimierungsverfahren der nichtlinearen Programmierung zu lösen.
2. *Gleichmäßige Approximation (DE)*. In diesem Projekt ist dasselbe Problem wie im ersten Projekt zu lösen (Problem 1), diesmal mit dem Differential-Evolution-Verfahren.
3. *Problem des Handlungsreisenden*. Lösung des zweiten Problems mittels Evolutions-Verfahren.

Probleme

1 Gleichmäßige Approximation

Gesucht ist ein Polynom n -ten Grades

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

das eine vorgegebene Funktion g über dem Intervall $[a, b]$ im Sinne der Maximumnorm möglichst genau nachbildet. Anders ausgedrückt: Es sind Parameter a_0, a_1, \dots, a_n gesucht derart, dass die Funktion

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \max_{a \leq x \leq b} (|g(x) - P(x)|) = \max_{a \leq x \leq b} (|g(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)|)$$

ihren minimalen Wert annimmt.

Wählen Sie als Beispiele für $g(x)$ die Sinusfunktion im ersten Quadranten:

$$g(x) = \sin(x) \text{ für } 0 \leq x \leq \pi/2.$$

- (a) Stellen Sie die Funktion, die Approximation und den Approximationsfehler für verschiedene Grade n numerisch und grafisch dar.
- (b) Führen Sie die Approximation zum Vergleich mit dem quadratischen Mittelwert (euklidische Norm) des Fehlers durch, also mit der folgendermaßen definierten Zielfunktion

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\int_a^b (g(x) - P(x))^2 dx}.$$

- (c) Wie sieht die analytische Lösung des Problems aus? Überprüfen Sie einfache Fälle mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.
- (d) Wie lässt sich erreichen, dass der relative Approximationsfehler auch für x gegen 0 klein bleibt? Machen Sie Lösungsvorschläge und stellen Sie die Ergebnisse numerisch und grafisch dar.

2 Das Problem des Handlungsreisenden (Traveling Salesman Problem, TSP)

Reihenfolgeprobleme vom TSP-Typ treten in der Fabrikplanung auf, wenn beispielsweise die Arbeitsgänge in eine Folge zu bringen sind, so dass die zeitlichen und baulichen Restriktionen eingehalten werden und der Aufwand an Apparaten und Personal möglichst gering wird. Beim Handlungsreisendenproblem sind eine Anzahl von Orten und die Entfernungstabelle dazu vorgegeben und es wird die kostengünstigste Rundreise gesucht, bei der alle diese Orte angefahren werden. Als Kosten gelten die gefahrenen Kilometer. Das Problem ist für jede der Entfernungstabellen aus meinem Vorlesungs-Ordner zu lösen.