Der Beitrag Konrad Zuses zur Mathematikdidaktik

Festvortrag zur MNU-Hessen-Landestagung 2013

Timm Grams, Fulda, 5. September 2013

Inhaltsverzeichnis

Meine Damen und Herren, guten Tag.

Vor acht Jahren durfte ich hier vor Ihnen über Kreativität in der Mathematik reden. Heute spreche ich über einen großen Kreativen in der Mathematik.

Wenn ich von meinen Studenten Missbilligung ernten will, muss ich nur sagen, dass wir einmal ins Zuse-Museum gehen sollten, um dort etwas über Konrad Zuse und über Computer zu lernen. Dann kriege ich zu hören: „Das ist doch Vergangenheit und heute völlig überholt. Es ist nicht mehr interessant.“ Ich merke: Museum ist nicht angesagt, es ist nicht sexy genug.

Dabei hat Konrad Zuse dem heutigen Mathematikunterricht eine ganze Menge zu bieten. Vor allem ist alles, was er in seine Maschinen an Grundlegendem eingebaut hat, auch in den heutigen Rechnern noch die Basis. Da ist nichts, aber auch gar nichts veraltet. Aber machen wir langsam. Ich beginne mit einer

Übersicht

Wie angekündigt, versuche ich ein paar Fragen zu beantworten. Einige treiben mich schon lange um.

1. War Konrad Zuse Didaktiker?
2. Wie hat Konrad Zuse gelernt?
3. Was zeigt uns seine Arbeitsweise?
4. Was erfahren wir aus seinen Erfindungen über Zahlen und das Rechnen mit ihnen?
5. Was bringt der Computer im Mathematikunterricht?

Ich beginne mit der letzten Frage.

Was bringt der Computer im Mathematikunterricht?

Interessierte Kreise verkünden heute, dass es ohne Computer eigentlich gar nicht mehr geht, DAS LERNEN. Die Angebote auf dem Markt des eLearnings und des Edutainments sind schier unübersehbar. Ich werde ein Beispiel aus dem Unterricht für ABC-Schützen und eins für den Unterricht in der Sekundarstufe herauspicken. Ich beginne mit dem

Zählenlernen

Im Zuse-Jahr 2010 anlässlich des ZUSE 2.0- Kongresses am 26. Mai in Wiesbaden wurde Lernsoftware für die ganz Kleinen präsentiert. „Mauswiesel" heißt das Produkt. Und das zeigte eine Videoeinspielung:

Ein Erstklässler lernt das Zählen. Verschiedenfarbige Steckwürfel bewegen sich wie von Geisterhand und fügen sich zu einer Art Brücke. Das bewirkt der Schüler mithilfe der Maus eines Computers und mit einem sehr eingeschränkten Bewegungsrepertoire. Die Würfel sind virtuell, sie offenbaren ihre Existenz nur auf dem Bildschirm. Sie haben kein Gewicht, ihre Oberflächen, Kanten und Ecken bieten keine taktilen Reize, sie sind auf bloße optische Signale reduziert. Bei Ungeschicklichkeit fallen die Würfel nicht mit einem hörbaren Klick herunter, sondern sie lösen sich in nichts auf. Das Einschnappen der Stecknoppen bleibt ohne sinnlich wahrnehmbaren Effekt.

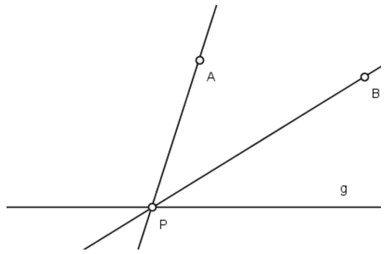
So also funktioniert kindliche Welterkundung im Computerzeitalter – zumindest nach den Vorstellungen der Bildungsbürokratie.

Dabei gehört es heute zu den gesicherten Erkenntnissen der biologischen Forschung: Hirnentwicklung und die Entwicklung der Feinmotorik, insbesondere die Entwicklung der Feinbeweglichkeit der Hände, sind eng miteinander verzahnt. Das gilt sowohl für die Stammesgeschichte als auch für die geistige Entwicklung eines jeden von uns. Körperliche Bewegung fördert die Denkfähigkeit[1]. Unsere Wahrnehmung bildet sich nur durch Erfahrung und Training in der wirklichen Wirklichkeit heraus und nicht etwa in virtuellen Welten.

Was den Kleinen mit der Lernsoftware hier zugemutet wird, ist keine Welterkundung. Das ist SCHEINWELTERKUNDUNG. Es braucht keinen Manfred Spitzer für die Erkenntnis, dass es SO NICHT GEHT. Hier ist das zweite Beispiel, ein Angriff auf den Welterkundungseifer von fortgeschrittenen Schülern unter dem Thema

[1] Gerhard Neuweiler: Der Ursprung unseres Verstandes. Spektr. d. Wiss. (2005) 1, S. 24-31

Erfolgserlebnisse beim Lernen und deren Verhinderung mittels Computer



In einem Buch zum Computereinsatz im Mathematikunterricht[2] fand ich dieses Problem: Gegeben ist eine Gerade g und dazu zwei nicht auf der Geraden liegende Punkte A und B. Auf der Geraden g ist ein Punkt P zu konstruieren derart, dass der Winkel $\angle APB$ genau so groß ist wie der Winkel, den die Gerade PB mit der Geraden g bildet.

Ich nahm mir vor, den Instruktionen des Buches zu folgen. Die Autoren geben einen Lösungshinweis: Man spiegele den Punkt A an der Geraden PB. Offensichtlich ist das Problem gelöst, wenn dieses Spiegelbild auf der Geraden g liegt. Die Aufgabe scheint mir trotz der angebotenen Hilfestellung immer noch recht interessant zu sein. Genau kann ich das allerdings nicht sagen, weil ich meinem Vorsatz entsprechend, ohne über das eigentliche Problem nachzudenken, den Instruktionen der Autoren folgte.

Da es in dem Buch um den Computereinsatz im Mathematikunterricht geht, wird die Aufgabe als ein Musterbeispiel für den Einsatz Dynamischer Geometriesysteme gesehen. Die Autoren meinen: „Der Auffassung der Figuren als starre Gebilde kann und muss in verschiedener Weise entgegen gearbeitet werden. Das eine hierzu Erforderliche ist das Beweglichmachen der Teile einer Figur“ und sie stellen fest, dass der Computer ein Werkzeug und Hilfsmittel sei, mit dessen Hilfe ein Schritt in diese Richtung gegangen werden könne.

Also machte ich mich daran, ein solches Dynamisches Geometriesystem im Internet zu besorgen. Meine Wahl fiel auf das Java-Programm Z.u.L. (Zirkel und Lineal). Es war schnell installiert und verstanden.

Im Zugmodus zeichnete ich die Ortslinie des gespiegelten Punktes und die Lösung war sofort klar, samt Beweis. Aber etwas fehlte: das Glücksgefühl beim Finden. Die Lösung kam daher, noch bevor das Problem so richtig wehtun konnte. Es blieb ein Gefühl der Enttäuschung über die glatte und gar nicht aufregende Lösungsfindung.

Dieses Erlebnis erinnert mich an Asterix-Comics: Über die Dynamik, die in den statischen Bildern zum Ausdruck kommt, muss man einfach lachen. Als ich einmal einen solchen Comic als Zeichentrickfilm sah, war ich sehr enttäuscht: Alle Bewegungen wurden wahr und witzlos – ja: trivial.

Ich fürchte, dass dem Mathematikunterricht eine Trivialisierung mit Computerhilfe auf Dauer nicht bekommt. Zu den Denkfähigkeiten gehört eben auch, dass wir Bilder im Kopf in Bewegung versetzen können. Und genau das wäre im Geometrieunterricht zu üben.

Was Informatik-Gurus so von sich geben

Was man mit solchen Werkzeugen erwirbt, ist bestenfalls eine *Oberflächenkompetenz*. Und das meine ich sowohl im übertragenen als auch im konkreten Sinn: Man kann einen Computer bedienen, aber was da eigentlich geschieht, entgeht der Aufmerksamkeit.

Informatik-Gurus unterstützen diesen Trend zur *Oberflächenkompetenz*. Beispielsweise fordert Klaus Haefner von der Universität Bremen: “Jedem Schüler ein Notebook” (24.11.00, Fulda). Er meint, dass Lesen, Sprechen, Kreativ-Sein, Innovationsfähigkeit, Organisieren-Können, Solidarisch-Sein typisch menschliche Qualifikationen seien. Für den Rest, nämlich

[2] Hans-Georg Weigand, Thomas Weth: Computer im Mathematikunterricht. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2002

die „kognitive Sklavenarbeit“, habe man das „Denkzeug“: “Schreiben und Rechnen wird nicht mehr gebraucht. Sprechen und Lesen reicht.”

Dagegen wende ich ein: Schüler, die nicht mehr schriftlich mit Zahlen umgehen, verlieren den Begriff der Zahl. Diese Menschen werden später dem Computer hilflos ausgeliefert sein und ihn nicht oder falsch verstehen. Der Rechner kann nämlich aus prinzipiellen Gründen die Welt nie eins zu eins abbilden. Die Computerarithmetik weicht von unseren mathematischen Vorstellungen ab. Programmierfehler sind allgegenwärtig. Modellierungsfehler auch. Die Bedienoberflächen stecken voller Fallen.

Wenn José Encarnaçao von der Technischen Universität Darmstadt die Virtualisierung als Abfolge „Reale Umgebung → Abstraktes Modell → Digitale Repräsentation“ darstellt, dann übersieht er, dass wir gar nicht wissen, was *real*, ist und dass es die Hauptaufgabe der Wissenschaft ist, auf die Frage nach der *Realität* brauchbare Antworten zu liefern.

Auch Encarnaçaos Abfolge illustriert den Trend zur Oberflächenkompetenz und die Gefahr des Verlusts von Hintergrundwissen. Denn er geht noch weiter: Für ihn sollte virtuelle Realität ein vorrangiges Lehrmittel sein.

Das geht dann hin bis zum Edutainment im Kinderzimmer. Kindern wird es durch die Abschirmung von der „wirklichen Wirklichkeit“ immer schwerer gemacht, ihre Umwelt zu *begreifen*.

Mit dem allgemeinen Trend zur Oberflächenkompetenz geht das sinkende Interesse von Schülern einher, einen Ingenieurstudiengang zu beginnen. Schüler und Schülerinnen halten sich zwar für Experten im Umgang mit der Technik, zeigen jedoch geringes Interesse, sich intensiv mit der komplexen Materie zu befassen[3].

Fazit: Der Computer als Unterrichtsmittel mag seinen Platz haben. Zurzeit aber ist eher ein Zuviel als ein Zuwenig zu beobachten. Um den Computer als Lehrmittel wird es folglich in meinem Vortrag nicht gehen.

Nach dieser negativen Antwort auf die letzte meiner Fragen, arbeite ich nun die Fragen in der angegebenen Reihenfolge ab. Wie Sie vielleicht schon erahnen, wird auch die Antwort auf die erste der Fragen nicht sehr ermutigend sein:

War Konrad Zuse Didaktiker?

Konrad Zuse war ein von seiner Aufgabe besessener Erfinder. Leicht fassliche Erklärungen für sein Vorhaben bot er offenbar nicht. Zwar war er wohl ein begnadeter Menschenfänger. Er konnte seine Mitmenschen für sein Vorhaben begeistern: Seine Eltern überließen ihm das Wohnzimmer als Arbeitsraum. Studienkollegen arbeiteten dem Konrad unermüdlich zu. Aber sie sahen sich eher als Hilfsarbeiter. Wie das, was damals entstand, funktionieren sollte, blieb ihnen verborgen. Am besten wird das deutlich in einigen Wortmeldungen aus der damaligen Zeit.

„Die volle Zukunft des Computers habe ich damals noch nicht erkannt, da es mir noch nicht möglich war, Zuse in all seinen himmelstürmenden Ideen zu folgen“ schreibt einer, und von einem anderen erfahren wir: „Fest glaubten wir alle an ihn und seine Erfindung. Wir wussten natürlich nicht genau, wie alles arbeiten sollte. Er hatte zwar versucht, mir z. B. die Vorzüge des Dual-Systems als Kommandosprache für die Maschine zu erklären. Natürlich verstand ich als mathematisch geschulter junger Mensch das Prinzip und das Vorhaben, ich war aber nicht in der Lage zu verstehen, wie z. B. das Speicherwerk seiner utopischen Maschine funktionie-

---

[3] Kirsten Schindler vom Institut für Sprach- und Kommunikationswissenschaft der RWTH Aachen (2005)

ren sollte. Was war nun meine Aufgabe?“ und weiter schreibt er: „Ich bin ehrlich genug zu sagen, dass ich blind arbeitete und nicht genau wusste, wie dieses Monstrum, das da entstand, einmal arbeiten sollte.“[4]

Ein Didaktiker war Konrad Zuse wohl nicht. Was ich auch nicht besonders schade finde. In Deutschland leidet die Pädagogik unter einem Mangel an Empirie. Und da ist mir einer, der sich über die von ihm gebauten Maschinen mitteilt, doch lieber als ein an Hegel geschulter Didaktiker.

Nach so viel Ernüchterndem über Konrad Zuses theoretischen Beitrag zur Mathematikdidaktik wird es nun Zeit für Hoffnung. Denn von vielen Zuse-Fans und -Forschern wird meines Erachtens total unterschätzt, was wir von Konrad Zuse über das Lernen lernen können. Ich frage also:

Wie hat Konrad Zuse gelernt?

Beachten Sie Zuses Hände. Auf überaus vielen Photos von ihm sind sie aktiv. Zuse hat die Welt im wahrsten Sinne des Wortes *begriffen*.

Der Stabilbaukasten war sein „Ein und Alles“. Auf der selbst gefertigten Karikatur des Sechzehnjährigen ist sein Greiferkran, abgebildet. Das *Handwerk* spielte in Zuses Leben eine große Rolle. Das zeigen auch die von ihm gemalten Bilder.

Vermutlich hat diese Art der konkreten Welterfassung Zuse zur gedanklichen Bewältigung großer Komplexität befähigt. Und diese Vermutung stimmt mit den Erkenntnissen der Hirnforschung und der Anthropologie überein. Ich sprach bereits von der engen Verzahnung von Hirnentwicklung und Feinmotorik.

Und das können wir heute daraus lernen: Virtuelle Realität mag in der Schule von Nutzen sein – aber nicht zu viel davon und vor allem nicht zu früh.

Mehr bringt – zumindest vom pädagogischen Standpunkt – der Blick zurück: Wie haben die Computererfinder ihr Klassenziel erreicht? Was zeichnet ihre geistige Entwicklung aus, was hat sie gefördert? Ganz gewiss spielte der Computer dabei keine Rolle! Für die Computererfinder gab es keine virtuelle Realität. Ihnen blieb nur das *Lernen in der wirklichen Wirklichkeit*.

---

[4] Konrad Zuse: Der Computer – mein Lebenswerk. Springer-Verlag, 1984. S. 32

Zuses Arbeitsweise: Vom Problem zur Computerarchitektur

Was mich an Zuses Denkweise und Werk am meisten beeindruckt, ist die Zielorientiertheit. Anders als im Fall der Zuse-Rechner spielt bei den meisten anderen Entdeckungen und Erfindungen der Zufall die Hauptrolle und die Genialität des Erfinders liegt darin, dass er die Bedeutung seiner Entdeckung richtig einschätzt. So war es beispielsweise bei der Entdeckung des Penizillins durch Alexander Fleming und bei der Erfindung des Telefons durch Alexander Graham Bell.

Anders war es bei Konrad Zuse: Er hatte

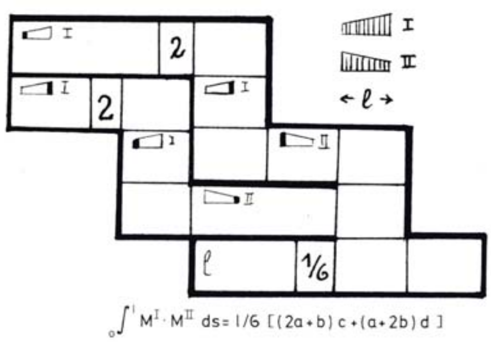
1. ein *Problem* erkannt,
2. sich ein *Ziel* zur Lösung dieses Problems gesteckt,
3. den Zielvorstellungen eine *Architektur* gegeben,
4. sich dann unbeirrt auf den Weg gemacht und
5. viele *originelle Lösungen* für Teilprobleme gefunden.

Das konstruktive Vorgehen und die Durchführung quasi im Alleingang sind das Besondere an diesem kreativen Prozess. Was nun war sein

Problem? Zuses Entschluss, Computer zu bauen, wurde durch eintönige Arbeiten ausgelöst. Das Maschinenbaustudium gab er wegen der Pedanterie im Maschinenzeichnen bald auf; er wechselte zur Architektur und schließlich zum Bauingenieurwesen. Aber dort wie auch später im Beruf als Statiker bei den Henschel-Flugzeug-Werken nervten ihn die routinemäßigen Kalkulationen. Auf dem FAI-Kolloquium 1992 in Fulda sagte er uns: „Ich war jung und wusste weit Besseres mit meiner Zeit anzufangen, als sie mit öden Rechnungen zu verbringen. Also suchte ich nach einer Lösung.“ Er setzte sich sehr früh im Leben sein

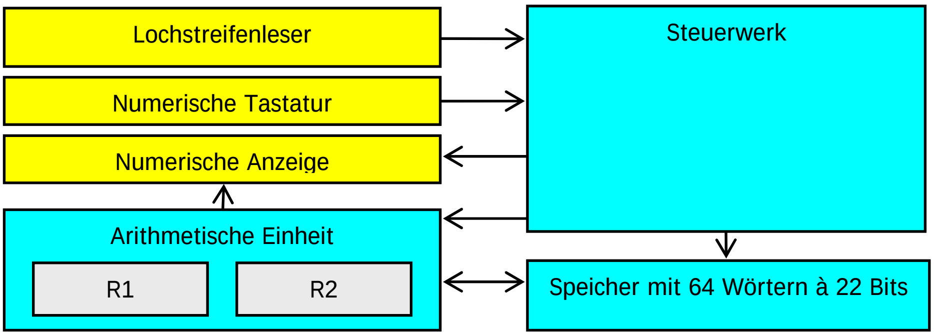
Ziel. In der Autobiographie schreibt er: „Ich … verstand … weder etwas von Rechenmaschinen, noch hatte ich etwas von Babbage gehört … Dies waren also die Anfangsbedingungen, als ich 1935 beschloss, Computererfinder zu werden.“ Da war Zuse 25 Jahre alt.

In seiner Autobiographie beschreibt Zuse, wie er dann, ausgehend von Rechenformularen, Schritt für Schritt die *Computerarchitektur* entwickelt hat. In seinen Rechenformularen hat er Felder für Zahlen, die zu addieren waren, untereinander und Felder für miteinander zu multiplizierende Zahlen nebeneinander angeordnet. Felder für die Zahleneingabe waren mit Symbolen hervorgehoben. Mit diesen Formularen konnte Zuse in streng sequentieller Rechnung aus den Eingabedaten Schritt für Schritt schließlich das Ergebnis errechnen.



Mit diesen Formularen hatte sich Konrad Zuse die mühselige Rechenarbeit schon wesentlich erleichtert. Aber das war ihm nicht genug. Als nächster Schritt musste das Ausrechnen solcher Formulare mit Rechenmaschinen folgen. Aus dieser Zweckbestimmung ergab sich für Zuse fast zwangsläufig die Architektur der Rechenmaschine. Deren wesentlichen Funktionseinheiten sind

1. der Lochstreifenleser für die Programmeingabe,
2. Tastatur und Anzeige für die Zahlenein- und -ausgabe,
3. das Steuerwerk für die Ablaufsteuerung,
4. das Rechenwerk, im Kern ein Addierer, und
5. der Zahlenspeicher für das Notieren von Zwischenergebnissen.



Funktionsmodelle der frühen Zuse-Computer im Zuse-Museum Hünfeld:

Z1 Rechnen und Speichern mit Blechen (1936)
Z1-Addierermodell (2-Bit-Addierer)

Z3 Rechnen und Speichern mit Relais (1941)
Komplettes Z3-Funktionsmodell
Detailmodell des Addierers

Z4 Rechnen mit Relais, Speichern mit Blechen (1950)
Original steht im Deutschen Museum München

Originalmaschinen in Hünfeld:

Z11 Lochstreifengesteuerter Relaisrechner (1955)
Vermessungswesen

Z22 Röhrenrechner (1956)

Z23 Transistortechnik (1961 Serienfertigung)
1966 weit verbreitet an deutschen Hochschulen

Z25 Universalrechner mit Magnetkernspeicher (1963)
1966 auch an deutschen Hochschulen (Inst. Kerntechnik)

Z31 Entwicklungsziel: Kleiner Bürorechner (1963)

Z64 Graphomat (1961)

Was erfahren wir von Konrad Zuse über Zahlen und das Rechnen mit ihnen?

Mein Interesse an Konrad Zuse beschränkt sich nicht auf die geistige Entwicklung des Computererfinders. Am meisten fasziniert mich, dass Konrad Zuse für seine ersten Rechenmaschinen bereits alles Wichtige bedacht hat, das auch heute noch eine fundamentale Rolle in den Computern spielt, auch in den allermodernsten. Die frühen Computer Zuses, also die Z1, Z3 und Z4 sind ideale Studienobjekte, wenn man wissen will, was in den heutigen Computern passiert.

Gerade an der *Zahlendarstellung* sieht man, wie sich Zuse von den Ingenieurstugenden leiten ließ. Er strebte nach Korrektheit, Bedienfreundlichkeit und Zuverlässigkeit der Funktion. Dabei war ihm die Eleganz der apparativen Ausführung wichtig: Zweckerfüllung und Effizienz bei möglichst geringem Aufwand.

Als junger Ingenieur habe ich mich darüber geärgert, dass in der Sprache Algol eine Division durch null nicht möglich war. Heute noch gibt es Compiler der Programmiersprache C, die damit nicht zurechtkommen. Hätte man die in der reellen Analysis schon seit Langem eingeführten Rechenregeln für $\pm\infty$ im Rechner realisiert, wären Widerstands- und Leitwertberechnungen sehr viel einfacher: Der Leitwert eines Widerstands vom Wert 0 (Ohm) ist nun einmal nicht nur sehr groß, sondern gleich ∞. Inzwischen scheint das Problem endlich gelöst zu sein. Die Programmiersprache Java jedenfalls kann mit dem Wert unendlich richtig umgehen.

Donald Knuth, einer der Großen im Fach Informatik, betont im Band 2 seines Werkes "The Art of Computer Programming", dass Zuses Maschinen die Gleitpunkt-Darstellung nutzten und dass er bereits Regeln für das Rechnen mit speziellen Größen wie ∞ und „undefiniert" berücksichtigte[5]. Zuses halblogarithmische Zahlendarstellung nimmt in allen wesentlichen Punkten die Festlegungen des heute allgemein akzeptierten Standards[6] für die moderne Gleitpunkt-Darstellung reeller Zahlen vorweg. Die Weitsicht Konrad Zuses ist wirklich beeindruckend.

Nun kommen wir zum Herzstück eines jeden Computers und sprechen über

Die zentrale Rolle des Addierers

Wer sich mit der Entstehung des Computers befasst, will auch wissen, in welchem Umfeld sich die Sache abgespielt hat: Welche Ideen aus der Computer-Vorgeschichte, insbesondere aus der Geschichte des mechanischen Rechnens, haben die Sache vorbereitet?

Von den Pionieren des mechanischen Rechnens hebt Konrad Zuse zwei hervor: Gottfried Wilhelm Leibniz und Blaise Pascal. Von Leibniz hat Zuse das Rechnen im Dualsystem übernommen und von Pascal kannte er wohl die Methode der Komplementbildung, mit der sich die Subtraktion zweier Zahlen auf die Addition zurückführen lässt.

Neben der allgemeinen Neugier gibt es einen weiteren und wichtigen Grund, eine „Archäologie der Neuzeit" zu betreiben. Wenn wir heute einen Computer-Mechanismus erklären, dann geschieht das meist in einem speziellen Zusammenhang, der durch die aktuelle Technik vorgegeben ist. Wird die Entstehungsgeschichte bewusst, so löst sich der Mechanismus aus diesem Spezialzusammenhang. Die Ausgrabung des Vorgängers oder gar des Originals führt zur Blickfelderweiterung. Und das können wir im Mathematik- und Informatikunterricht nutzen. Ein schönes Beispiel dafür ist die

Komplementbildung

Mittels Komplementbildung wandeln unsere heutigen Computer eine Subtraktion ganzer Zahlen in eine Addition um. Es ist ein Trick, der scheinbar auf die Welt der Bits und Bytes beschränkt ist. Aber gehen wir zurück.

Im Jahr 1642 hat Blaise Pascal eine Rechenmaschine zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen im Dezimalsystem vorgestellt. Die Zählräder ließen sich nur in eine Richtung drehen. Das war dem Mechanismus für den Zehnerübertrag geschuldet. Deshalb konnte man mit der Maschine eigentlich nur addieren.

Pascal aber hatte auch für die Subtraktion zweier Zahlen eine Lösung: Auf den Einstellrädern waren zwei Ziffernreihen angebracht: eine in aufsteigender Folge und eine in absteigender. Für die Einstellung des Subtrahenden genügte es, ein Abdeckblech so zu verschieben, dass anstelle der Ziffern deren Neunerkomplement sichtbar wurde.

---

[5] "Floating point arithmetic was incorporated into the design of some of the earliest computers. It was independently proposed by Leonardo Torres y Quevedo in Madrid, 1914; by Konrad Zuse in Berlin, 1936, and by George Stibitz in New Jersey, 1939. Zuse´s machines used a floating binary representation that he called 'semi-logarithmic notation'; he also incorporated conventions for dealing with special quantities like '∞' and 'undefined'." (Donald Knuth, 1981, S.209)

[6] IEEE Standard for Binary Floating Point Arithmetic, ANSI/IEEE 745-1985

Ist beispielsweise die Zahl 1642 von der Zahl 1941 abzuziehen, ersetzt man zuerst diese Zahl durch ihr Neunerkomplement: 8357. Durch die Addition einer Eins gelangt man zu 8358. Nun ist diese Zahl zum Minuenden 1941 zu addieren. Bei Beschränkung auf die letzten vier Stellen ergibt sich so das korrekte Ergebnis der Subtraktion, nämlich 0299.

Dieser Fund veranlasst uns zu einer kleinen Herleitung. Schnell haben wir den allgemeinen Zusammenhang gefunden; und nun verstehen wir auch die Komplementdarstellung in der Binärwelt des heutigen Computers besser.

Die Binärwelt selbst ist auch keine Erfindung des Computerzeitalters. Das Feld war spätestens durch Leibniz bereitet. Schon 1697 schrieb er über die *Vorzüge des Dualsystems:* „Das Addieren von Zahlen ist bei dieser Methode so leicht, dass diese nicht schneller diktiert als addiert werden können… Ich gehe nun zur Multiplikation über. Hier ist es wiederum klar, dass man sich nichts Leichteres vorstellen kann… Diese Art Kalkül könnte auch mit einer Maschine durchgeführt werden."

In der Binärwelt hat das Kleine Einmaleins eben nicht mehr 45 verschiedene Produkte, sondern nur noch eins: $1 \times 1 = 1$. Und warum hat man dann nicht schon längst solche Maschinen gebaut? Der Mensch hat sich an das Dezimalsystem gewöhnt. Es ist schwer, ihm den Umgang mit einer Maschine, die nur Nullen und Einsen kennt, schmackhaft zu machen.

Dieses Problem hat Konrad Zuse gelöst. Eine der wesentlichen Leistungen Konrad Zuses besteht meines Erachtens in der konsequenten Befolgung der Regeln der Mensch-Maschine-Kommunikation. In der Maschine „sind die Zahlen unter sich", wie Konrad Zuse sagte. Die interne Zahlendarstellung muss keinerlei Rücksicht auf den Menschen nehmen. Einen Nutzen hat eine solche Maschine aber nur, wenn sie sich vom Menschen mit seinen Gewohnheiten einfach bedienen lässt. Aus diesem Grund nimmt Konrad Zuse den hohen Aufwand für die Zahlenwandlung vom Dezimal- ins Dualsystem und umgekehrt in Kauf. Auch in diesen Abläufen spielt der Addierer die Hauptrolle.

Nicht nur die Subtraktion, auch die anderen Rechenarten lassen sich auf die Addition zurückführen: Die Multiplikation und die Division. Der Addierer ist die zentrale Funktionseinheit des Computers und ständig in Aktion. Durch ihn wird die Arbeitsgeschwindigkeit des Rechners bestimmt. Konrad Zuse hat deshalb auf die Konstruktion eines effizienten Addierers allergrößten Wert gelegt. Er fand eine Möglichkeit für die Addition mit *einschrittigem Übertrag.* Und die wollen wir uns jetzt etwas genauer ansehen.

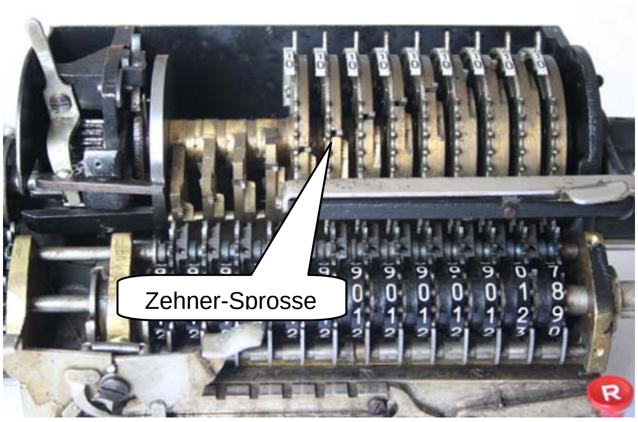
Der einschrittige Übertrag

Wenn wir zwei Zahlen addieren, dann addieren wir erst die Ziffern der letzten Stelle, schreiben das Ergebnis darunter und nehmen den Übertrag auf die nächsthöhere Stelle mit. Dann addieren wir die Ziffern dieser Stelle und arbeiten uns so von rechts nach links – immer schön nacheinander – voran.

Nun kann man sich einen Mechanismus ausdenken, der diesen Prozess mit Zählrädern nachbildet. Bei der Addition neunstelliger Zahlen kommt man dann auf neun nacheinander auszuführende Schritte, die jeweils eine Kurbelumdrehung erfordern. Das artet in eine ziemliche Kurbelei aus. So oder ähnlich funktionierten die frühen Rechenmaschinen.

Vorteilhafter wäre eine Maschine, deren Zählräder parallel arbeiten und so die Ergebnisziffern sämtlicher Stellen gleichzeitig abliefern können. Wäre da nicht der Übertrag! Er scheint das sequentielle Vorgehen von rechts nach links zu erzwingen.

Die Sprossenradmaschinen zeigen, dass es auch anders geht. Sie gehen auf eine Erfindung von Giovanni Poleni (1709) zurück und wurden von Willgodt Theophil Odhner und Franz



Trinks gegen Ende des 19. Jahrhunderts für die Massenfertigung vervollkommnet. Noch bis in die siebziger Jahre des letzten Jahrhunderts leisteten sie in vielen Büros gute Dienste.

Sprossenradmaschinen dieser Bauart erledigen die Addition zweier mehrstelliger Zahlen mit einer einzigen Kurbelumdrehung. Die Additionen passieren auf allen Stellen gleichzeitig. Dafür sind die Sprossen da, die jeweils etwa das erste Drittel eines jeden Sprossenrades einnehmen. Anschließend folgt je Rad eine Zehnersprosse für den Übertrag. Diese Zehnersprossen sind von Rad zu Rad leicht gegeneinander verschoben, so dass die Überträge allesamt kurz hintereinander erfolgen können. Dafür wird ein weiteres Drittel des Sprossenradumfangs gebraucht.

Die Zehnersprossen sind nicht versenkbar wie die Zählsprossen. Sie werden durch eine Feder in einer Lage gehalten derart, dass sie vom Zählrad nicht erfasst werden können. Erst wenn die vorhergehende Stelle einen Übertrag ergibt, sorgt der Zehnervorbereitungshebel dafür, dass die betreffende Zehnersprosse in die Spur des Zählrades gedrückt wird. Je Sprossenrad wird noch eine Zehnersprosse für die Subtraktion gebraucht – dafür ist Platz auf dem restlichen Drittel des Sprossenrads.

Solche Effizienzüberlegungen im Zusammenhang mit der Addition – eine zentrale, immer wiederkehrenden Operation – begegnen uns bei den Zuse-Rechnern wieder und sie spielen auch beim Bau heutiger Computer eine wichtige Rolle. Immer geht es um eine Lösung für den *einschrittigen Übertrag*.

Schaltgliedtechnik – Abstraktion und Konkretisierung

Das Binärsystem macht Vieles einfacher. Und das liegt daran, dass für die zweiwertige Logik ein paar sehr hilfreiche Regeln gelten. Solche Regeln hat sich Zuse selbst erarbeitet und das Resultat seiner Bemühungen als „Bedingungskombinatorik“ bezeichnet. Diese Abstraktion erlaubte es ihm, die Grundprinzipien des Rechnens auf verschiedene Technologien zu übertragen. Zuse hat seine Computer in mechanischer, in elektromechanischer und in elektronischer Technik gebaut. Nun wollen wir uns einmal anschauen, wie die Addition in diesem Binärsystem funktioniert.

Dualzahlen und deren Addition – eine elementare Einführung

	16	8	4	2	1
13		1	1	0	1
+3				1	1
Summe o. Ü.		1	1	1	0
Übertrag	1	1	1	1	
=16	1	0	0	0	0

Wer verstehen will, wie der Computer funktioniert, braucht keine vertieften Kenntnisse über Zahlen und das Rechnen mit ihnen. Es reicht, wenn er weiß, was Abzählen bedeutet und wenn er Paare von Gegenständen bilden kann.

Wir bauen uns ein Rechenbrett mit einer rechteckigen Anordnung von Feldern. Alle Felder einer Spalte haben dieselbe Wertigkeit. Ganz rechts haben wir die Einer-Spalte. Die Wertigkeit der Spalte links daneben ist doppelt so groß: 2. Und so geht es weiter. Jedes Feld hat die doppelte Wertigkeit des Feldes rechts daneben.

In jeder Zeile des Rechenbretts können wir eine Zahl dadurch repräsentieren, dass wir die Felder der Zahlen, deren Wertigkeiten in der Summe die darzustellende Zahl ergeben, mit einem Steinchen belegen oder sonst wie markieren, beispielsweise mit dem Symbol „1“. Die Zahl 13 entspricht der Belegung der ersten Zeile unseres Rechenbretts. In ein leeres Feld schreiben wir das Symbol „0“. Auf diese Weise ist die Zahl auch dann noch lesbar, wenn die Feldeinteilung fehlt: 1101. Das ist die Dualzahldarstellung der Dezimalzahl 13.

Das Rechnen im Binärsystem fällt leichter, wenn man bei der Umwandlung ins Binärsystem folgendes Verfahren wählt: Wir repräsentieren jede Zahl durch eine entsprechende Zahl von Steinchen. Zu Beginn legen wir sämtliche Steinchen in das Feld mit der Wertigkeit 1. Das ist eine durchaus gültige Repräsentation der Zahl, wenngleich nicht besonders einfallsreich; und es werden reichlich Steinchen benötigt. Bei der Beispielszahl sind es eben 13.

Jetzt fassen wir die Steinchen paarweise zusammen. Eins bleibt ungepaart. Das lassen wir in dem Feld der Wertigkeit 1 liegen. Von den Paaren nehmen wir jeweils ein Steinchen in das Feld links daneben und das andere legen wir beiseite. Auf dem Feld mit der Wertigkeit 2 liegen jetzt also 6 Steinchen. Auch diese Repräsentation der Zahl 13 ist korrekt: $6{\cdot}2 + 1{\cdot}1$. Jetzt fahren wir mit diesem Verfahren fort: Solange mehr als ein Steinchen auf einem Feld liegt, reduzieren wir die Anzahl, indem wir Steinchen paarweise entfernen und für jedes der Paare ein Steinchen in das Feld mit doppelter Wertigkeit legen. Im nächsten Schritt ergibt das $3{\cdot}4 + 0{\cdot}2 + 1{\cdot}1$. Und schließlich $1{\cdot}8 + 1{\cdot}4 + 0{\cdot}2 + 1{\cdot}1$. Jetzt liegt auf jedem Feld höchstens ein Steinchen und wir haben die Binärdarstellung der Zahl 13 gewonnen.

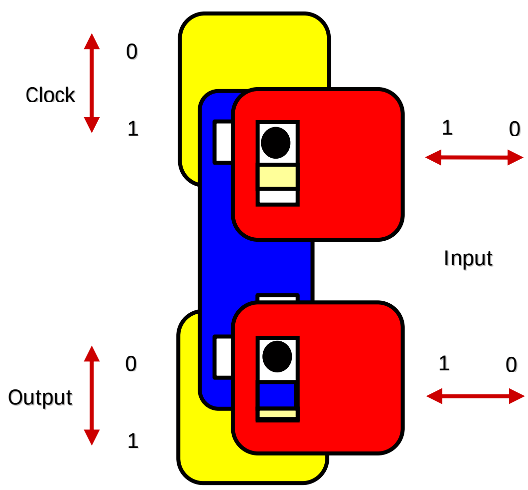
Wir wollen zur Zahl 13 die Zahl 3 addieren. Die zweite Zeile unseres Rechenbretts enthält die zugehörige binäre Darstellung. Zur Addition werden die Steine in übereinander liegenden Feldern einfach im Feld der oberen Zeile, der Ergebniszeile, zusammengefasst.

Jetzt müssen wir nur noch dafür sorgen, dass in jedem Feld der Ergebniszeile höchstens ein Stein liegt. Aber das funktioniert genauso wie bei der Zahlendarstellung: Liegen zwei oder drei Steinchen in einem Feld, bildet man wieder ein Paar, legt eins der Steinchen in das Feld links daneben – das ist der *Übertrag,* das andere kommt zum Vorrat. Was im Feld liegen bleibt, ist die *Summe ohne den Übertrag*.

Die Rechenoperation für das Übertragszeichen ist die logische Und-Verknüpfung (AND) und die Rechenoperation für die Summe ohne Übertrag ist die logische Exklusiv-Oder-Verknüpfung (XOR).

Ohne jetzt zu sehr in die Tiefe zu gehen, lässt sich Zuses Methode des einschrittigen Übertrags so beschreiben: Die stellenweise Addition ohne Übertrag lässt sich in allen Stellen zeitlich parallel erledigen. Das ist bei Zuse der Schritt I der Addition. Danach ist es möglich, die Überträge ebenfalls in einem Taktschritt zu erledigen. Im Schritt II passiert also der *einschrittige Übertrag*. Schließlich erfolgt im Schritt III für die Summenzeichen und die Übertragszeichen eine wiederum gleichzeitig, also parallel ausführbare Addition ohne Übertrag.

Wen die Details interessieren, der kann sich die Sache im Zuse-Museum in Hünfeld oder auch auf der MatheHilft-Seite (www.mathehilft.de) ansehen.

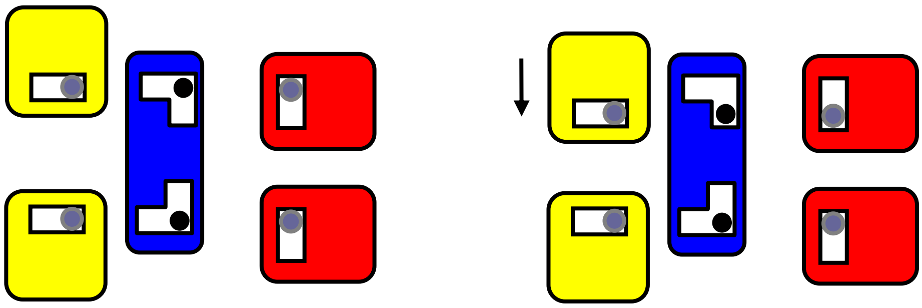


Die Schaltglieder AND und XOR

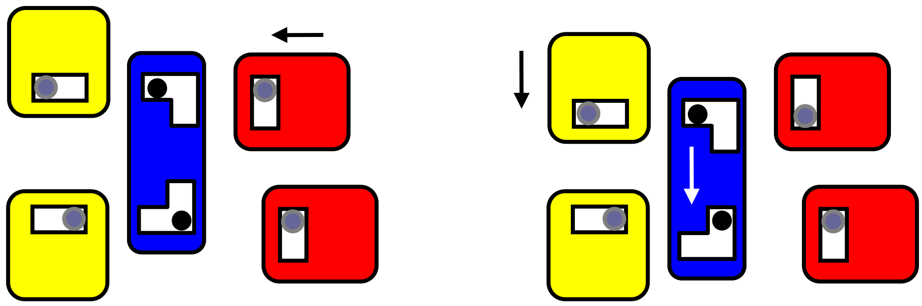
Die Skizze zeigt den prinzipiellen Aufbau eines

AND-Schaltglieds (logisches Und): Gelb sind das Taktblech und das Blech der Ausgangsgröße. Die beiden Bleche für die Eingangsgrößen sind rot und blau ist das Kopplungsblech. Die schwarzen Kreise repräsentieren die Schaltstifte in Draufsicht. Sie stellen Kopplungen zwischen den Blechen her.

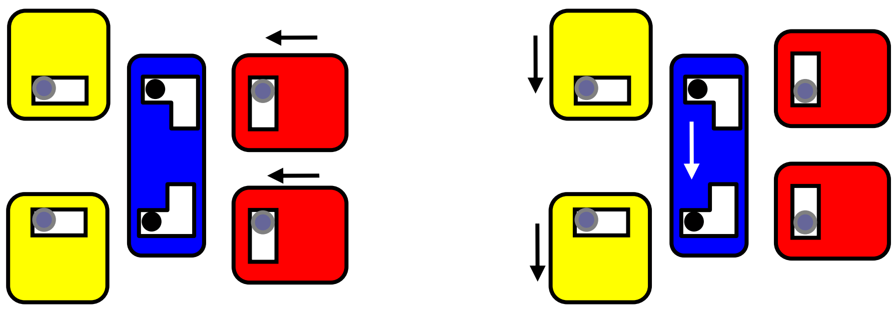
Die Ausfräsungen sind in den folgenden Explosionsbildern besser zu sehen. Im linken Bild sind Takt (Clock) und Eingangsgrößen (Input) jeweils in der Anfangsposition 0. Das rechte Bild zeigt das Ergebnis, wenn der Takt auf die 1-Position geschoben wird. Das Kopplungsblech und Ausgangsblech bewegen sich nicht.

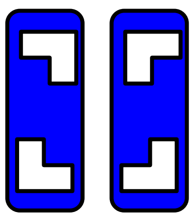


Jetzt werden alle Bleche wieder zurück in die Ausgangslage gebracht. dann wird das Blech des oberen Eingangs nach links in die 1-Position geschoben. Es entsteht das linke der folgenden Bilder. Nach Betätigen des Takts (rechtes Bild) hat sich zwar das Kopplungsblech, nicht aber das Ausgangsblech bewegt.



Erst wenn beide Eingänge auf die 1-Position gebracht werden, bewegt sich mit dem Takt auch das Ausgangsblech in die 1-Position. Das zeigen die folgenden Explosionsbilder.





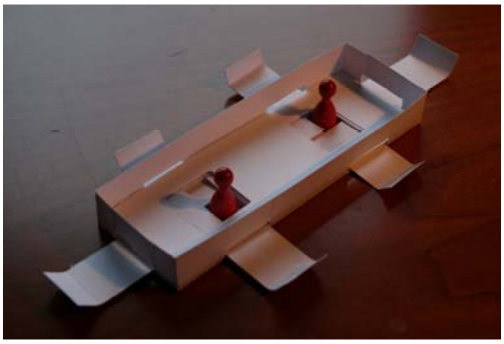
Das AND-Schaltlied liefert also genau das gewünschte Ergebnis: Nur dann, wenn beide Eingänge gleich 1 sind, wird durch den Takt auch der Ausgang auf 1 gesetzt.

Für das XOR-Schaltglied (exklusives Oder) sind zwei Kopplungsbleche nötig. Alles andere kann bleiben wie beim AND-Schaltglied. Die Ausfräsungen der Kopplungsbleche sind im nebenstehenden Bild zu sehen.

Grandioser Fehlschlag und Glückstreffer: der mechanische Rechner Z1

Wegen des zu erwartenden hohen Platzbedarfs eines Zahlenspeichers in Relaistechnik entwickelte Zuse für seinen ersten Rechner eine mechanische Schaltgliedtechnik. Die Z1 baute er vollständig mechanisch auf. Der Speicher dieses Rechners funktionierte einwandfrei, aber bei der Verarbeitung gab es Probleme. Deshalb baute Zuse später die Z3 in Relaistechnik auf. 1941 wurde das Funktionieren dieses Rechners unter Anwesenheit von Gutachtern festgestellt. Damit steht dieses Jahr als Geburtsjahr des Computers fest.

Wegen der Kompaktheit und Zuverlässigkeit des mechanischen Speichers realisierte Zuse die Z4 in gemischter Technik: Er kombinierte die Relaislogik mit dem mechanischen Speicher.



Weitere technologische Schritte waren die Einführung der Röhrenschaltungen und des Trommelspeichers (Z22) sowie der Übergang auf die Transistorlogik (Z23). Diese Rechner waren zu Beginn meiner Studienzeit an den Hochschulen Deutschlands weit verbreitet.

Mit der Z1, dem mechanischen Rechner, hat Konrad Zuse der Mathematik- und Informatik-Didaktik ein Geschenk gemacht, dessen Wert meines Erachtens immer noch unterschätzt wird. Gut – diese mechanischen Geräte sind für die Praxis untauglich; das hat bereits Konrad Zuse in seinen Lebenserinnerungen dargelegt. Aber unnütz war der Umweg nicht: „Immerhin hatte ich auch an ihnen die Grundgesetze der Schaltungstechnik entwickeln und erproben können". Und genau das ist das Angebot an die heutigen Schüler und Studenten: Die mechanische Technik ist *Informatik zum Anfassen.*

Wer etwas für die Feinbeweglichkeit seiner Hände tun will, für den gibt es auf der Mathe-Hilft-Seite die Vorlage für einen Papierbastelbogen für mechanische Schaltglieder. Damit lassen sich alle elementaren Operationen wie UND, ODER, NICHT, ANTIVALENT und ÄQUIVALENT nachbauen.

Schluss

Ich fasse zusammen: Konrad Zuse hatte wohl keinen Ehrgeiz, neben seiner Erfindertätigkeit auch noch ein meisterhafter Didaktiker zu sein. Was er den Pädagogen aber gegeben hat, ist ein vorgelebtes Lehrbeispiel dafür, wie Lernen funktioniert, nämlich durch Begreifen der wirklichen Wirklichkeit. Simulationen in virtuellen Welten sind kein Ersatz dafür. Zuses zielorientierte Arbeitsweise ist beispielhaft und bietet uns Anregungen für die Gestaltung von Lernprozessen. Für mich das Wichtigste aber ist sein Versuch, einen rein mechanisch arbeitenden Rechner zu schaffen: die Z1. Dieser großartige Ansatz hat zwar nicht zu einer wirtschaftlich erfolgreichen Computer-Technologie geführt. Aber die Möglichkeit, mit einfachsten mechanischen Mitteln Modelle für die Komponenten eines modernen Computers zu schaffen, kann Lehrern und Schülern neue und *begreifbare* Zugänge zum Verständnis der Informatik und der numerischen Mathematik erschließen.