Schöpferisches Denken in der Mathematik
Impulse zum besseren Lernen

Gastvortrag im Ernst-Schröder-Zentrum für begriffliche Wissensverarbeitung
am 1.12.2006 in Darmstadt
Timm Grams, Hochschule Fulda, www.fh-fulda.de/~grams

Ist denn etwas Enthusiasmus zuviel verlangt?
Alexander von Humboldt zu Aimé Bonpland
in „Die Vermessung der Welt“ von Daniel Kehlmann

Mein Name ist Wolf. Ich löse Probleme.
Aus „Pulp Fiction“ von Quentin Tarantino

Der Verfall der mathematischen Bildung und der um sich greifende mathematische Analphabetismus sind besorgniserregend. Es gibt einen Trend zur Oberflächenkompetenz und einen zunehmenden Glauben an die Wirksamkeit von Rezepten. Das passt nicht zum Bild des neuen Ingenieurs, von dem erwartet wird, dass er neben fachlicher und sozialer Kompetenz eine gehörige Portion Kreativität mitbringt. Was wir in der Ausbildung brauchen, ist ein Sprung heraus aus dem System. Durch die *Konfrontation mit dem Unvollkommenen* sollte sich die Begeisterung für das Problemlösen wieder wecken lassen.

Gliederung

Was sein soll – Ausbildungsziele

Die exportorientierte deutsche Wirtschaft agiert in Hochpreissegmenten. Hochmotivierte Ingenieure in Spitzentechnologien sind überlebenswichtig. Die Frage, wie die Ingenieursausbildung aussehen soll, stellt sich in den letzten Jahren immer dringlicher. Angesichts der Vorbildung unserer Studienanfänger rückt die Schnittstelle Schule-Hochschule immer stärker in das Blickfeld.

Und da gibt es Probleme. Diese gilt es zunächst einmal genauer zu beschreiben. Wir fangen mit der Beschreibung dessen an, was sein soll, also mit dem angestrebten Ergebnis der Ausbildung.

Der qualifizierte Ingenieur besitzt fachliche und soziale Kompetenz. Er kann länder- und disziplinenübergreifend arbeiten. Und er bedenkt die gesellschaftlichen Konsequenzen der Ingenieurstätigkeit: „Es muss so gut vom Fach her der Blick ins Allgemeine eröffnet wie vom Allgemeinen her der Blick auf das Fach hingelenkt werden“ (Theodor Litt, 1964).

Von zentraler Bedeutung ist die Fähigkeit, *Neues hervorzubringen*, denn für die Routinetätigkeiten gibt es Automaten.

Das Heranbilden einer Elite ist nicht vorrangig. Es geht um die *Durchschnitts- und Minimummaxmierung* im Sinne von Volker Claus (2005), also um ein breites, sehr hohes Durchschnittsniveau gemittelt über alle Hochschulen („Hätten wir fünf weitere Nobel-Preisträger, so könnten sich einige Universitäten damit schmücken. Auf die Wirtschaftskraft hätte dies faktisch keinen Einfluss …“). Martin Wagenschein (1968) sagt es so: Wir dürfen „nicht oft hervorragende aber bedächtige Begabungen verscheuchen“.

Was ist – Naturwissenschaften und Mathematik in der Defensive

Über die Lage der Naturwissenschaften und der Mathematik an unseren Schulen und in der Gesellschaft gibt es inzwischen reichlich Daten und Analysen. TIMSS und PISA sind oft zitierte Untersuchungen. Die mathematische Vorbildung angehender Ingenieure war das Thema des Fuldaer Seminars „In Mathe schwach“ (Grams, 2005). Ich will – zur Einstimmung in das Thema – dem nur noch ein paar Erfahrungen und Gedanken hinzufügen. (Was ich hier vorbringe, schließt an mein Vortragsmanuskript „Schöpferisches Denken in der Mathematik“ aus dem Jahr 2005 an.)

Der Trend zur Oberflächenkompetenz

Die Evaluation meiner Lehrveranstaltungen für Erst- und Zweitsemester offenbart die folgenden Studentenwünsche: „Der Lehrinhalt müsste schneller übermittelt werden.“ „Der Lehrende sollte direkter auf das gewünschte Lernziel zusteuern.“ „Es müsste mehr Minibeispiele geben.“

Verlangt werden also ein größeres Angebot an Rezepten – „mit denen ich dann viel Geld verdienen kann“, wie vor Jahren einmal ein Student meinte – und ein Mehr an routinemäßiger Anwendung derselben. Bedarf an einem tieferen Verständnis und an eigener Entdeckungsarbeit wird nicht geäußert.

Mit vielen Minibeispielen, die sich routinemäßig lösen lassen, lässt sich eben mit wenig geistigem Aufwand ein – wenngleich bescheidener – Lustgewinn erzielen.

Im Gegensatz dazu steht, was ich in einem höheren Semester erfahre: In der Lehrveranstaltung ist ein größeres Projekt zu bearbeiten. Im Laufe dieses Projekts sind einige ziemlich harte Nüsse auf mathematisch-logischer Ebene und auch programmiertechnischer Natur zu knacken. Das Genörgel während des Semesters angesichts der hohen Anforderungen und der frustrierenden Fehlversuche ist unüberhörbar. Aber es ist genau *diese* Lehrveranstaltung, in der ich zum Schluss in strahlende Augen blicke. Die Studenten können das Glücksgefühl anlässlich der erledigten anspruchsvollen Aufgabe nicht verbergen.

Aber auch zum Studienabschluss hat noch nicht jeder ganz begriffen, worum es geht. Wir sind im Kolloquium zu einer Diplomarbeit. Es geht um Parameterschätzungen. Der Kandidat antwortet auf meine Frage, was die von ihm benutzte Excel-Funktion „Solver“ so mache: „Damit habe ich mich nicht befasst.“

Manche Informatik-Gurus unterstützen den Trend zur *Oberflächenkompetenz*. Beispielsweise fordert Klaus Haefner von der Universität Bremen: “Jedem Schüler ein Notebook” (24.11.00, Fulda). Er meint, dass Lesen, Sprechen, Kreativ-Sein, Innovationsfähigkeit, Organisieren-Können, Solidarisch-Sein typisch menschliche Qualifikationen seien. Für den Rest, nämlich die „kognitive Sklavenarbeit“, habe man das „Denkzeug“: “Schreiben und Rechnen wird nicht mehr gebraucht. Sprechen und Lesen reicht.”

Dagegen wende ich ein: Schüler, die nicht mehr schriftlich mit Zahlen umgehen, verlieren den Begriff der Zahl. Diese Menschen werden später dem Computer hilflos ausgeliefert sein und ihn nicht oder falsch verstehen. Der Rechner kann nämlich aus prinzipiellen Gründen die Welt nie eins zu eins abbilden. Die Computerarithmetik weicht von unseren mathematischen Vorstellungen ab. Programmierfehler sind allgegenwärtig. Modellierungsfehler auch. Die Bedienoberflächen stecken voller Fallen.

Oberflächenkompetenz, eine Kompetenz, die nicht auf einer aktiven Durchdringung des Gegenstands beruht, geht mit einer unterentwickelten Kritikfähigkeit einher.

Wenn José Encarnaçao, TU Darmstadt, die Virtualisierung als Abfolge „Reale Umgebung → Abstraktes Modell → Digitale Repräsentation“ darstellt, dann übersieht er, dass wir gar nicht wissen, was *real*, ist und dass es die Hauptaufgabe der Wissenschaft ist, auf die Frage nach der *Realität* brauchbare Antworten zu liefern.

Auch Encarnaçaos Abfolge illustriert den Trend zur Oberflächenkompetenz und die Gefahr des Verlusts von Hintergrundwissen. Denn er geht noch weiter: Virtuelle Realität soll ein vorrangiges Lehrmittel sein.

Das geht dann hin bis zum Edutainment im Kinderzimmer. Kindern wird es durch diese Abschirmung von der „wirklichen Wirklichkeit“ immer schwerer gemacht, ihre Umwelt zu *begreifen* (Spitzer, 2002, 2005; Neuweiler, 2005).

Mit dem allgemeinen Trend zur Oberflächenkompetenz geht das sinkende Interesse von Schülern einher, einen Ingenieurstudiengang zu beginnen. Schüler und Schülerinnen halten sich zwar für Experten im Umgang mit der Technik, zeigen jedoch geringes Interesse, sich intensiv mit der komplexen Materie zu befassen (Frau Dr. Kirsten Schindler vom Institut für Sprach- und Kommunikationswissenschaft der RWTH Aachen, 7.7.2005).

Die folgende Geschichte aus einer höheren Schule markiert so etwas wie den Endpunkt der Entwicklung. Ein Schüler weigert sich, die Integralrechnung zu lernen. Seine Begründung: Auf meinem Taschenrechner gibt es das Integralzeichen. (Mitgeteilt von Carsten Rathgeber, Fulda.)

Die Basis fehlt

Wir sind in einer mündlichen Prüfung des Hauptstudiums. Es geht um den Produktsatz der linearen Systemtheorie. Der Prüfling beginnt zu erklären, ich unterbreche und frage, von welcher Art die Zahlen da am Eingang und Ausgang der Schaltung sind. Wir kommen mit einiger Hilfe von den natürlichen zu den ganzen, von dort zu den rationalen und danach zu den reellen Zahlen. Schließlich gebe ich den entscheidenden Hinweis: Es sind komplexe Zahlen. – Aber die kamen doch schon im ersten Semester, meint der Kandidat gekränkt.

„Es sind nicht die komplizierten weiter fortgeschrittenen Kenntnisse, die den Studenten fehlen, sondern die grundlegenden, einfachen“ (Hartmut von Hentig in Wagenschein, 1968).

Pädagogische Volksweisheiten

Unsere Pädagogik ist seit den 60-er Jahren auf das Beseitigen von Hindernissen ausgerichtet. Probleme kommen im Leben der Kinder möglichst nicht vor.

Die Freude am gelösten Problem wird den Kindern so nicht geboten, ihr Neugiertrieb droht zu verkümmern.

Wen wundert's, dass sich die Aufgewecktesten unter ihnen den elektronischen Medien und den Computerspielen zuwenden. Dort finden sie, was sie brauchen: Strukturen und Regeln, Probleme und Glücksgefühle bei der erfolgreichen Bewältigung von Schwierigkeiten.

Leider nützen die in den virtuellen Welten erworbenen Fähigkeiten im wirklichen Leben nur wenig (Bergmann, Hüther 2006).

Schauen wir uns einige zweifelhafte pädagogische Volksweisheiten einmal näher an.

„Mehr desselben"

„Man muss die Leute dort abholen, wo sie sind." Was ist daran verkehrt?

Dort wo „die Leute" sind, dort ist Sesamstraße, dort sind bild- und lustorientierte Einwegvermittlungen, forderungsfreie Glücksversprechungen, „elektronische Schnuller" – Suchtmittel also, die zum viel beklagten *Konsumverhalten in der Bildung* verführen.

Von Lehrern höre ich: „Ohne grafische Bedienoberfläche kriege ich meine Schüler nicht an den Rechner." Es wird mit Videoeinspielungen gearbeitet und mit mathematischer Experimentiersoftware. Kurven werden mit der Computer-Maus manipuliert; die Lösungen sind schon da, noch bevor das Problem so richtig wehtun kann. Man fragt sich, was Schüler dabei lernen können. Da kann doch nichts haften bleiben – bestenfalls entsteht eine *Weltbeherrschungsillusion*.

Ich bin davon überzeugt, dass „Abholen" nicht funktioniert, wenn es heißt „Mehr desselben". Die Konkurrenz gegen Steven Spielberg und George Lucas können wir nicht gewinnen.

Bild kontra Symbol

„Ein Bild sagt mehr als tausend Worte." Beim genauen Hinsehen muss man feststellen, dass das so wohl nicht stimmen kann. Dem Bild fehlen praktisch alle Sprachfunktionen: sowohl die niederen (die expressive und die Signal- oder Auslöserfunktion) als auch die höheren (die deskriptive und die argumentative Funktion).

Dafür hat es das Potential zur Verblendung und Irreführung. Die Inszenierung ist meist wichtiger als der Inhalt (Knieper, Müller). Und gerade deshalb lieben wir ja die Bilder!

In einem Projekt zur *Mensch-Maschine-Schnittstelle* geht es um Computer zur Überwachung technischer Anlagen, insbesondere um Leitwarten von Kraftwerken. Thema ist die Gestaltung von Bedienoberflächen derart, dass Fehlbedienung vermieden und die Fehlerdiagnose bestmöglich unterstützt wird. Die Arbeitshypothese lautet: Bildhafte Darstellungen helfen dem Operateur bei der Fehlerdiagnose. Es werden psychologische Experimente mit vielen Versuchspersonen durchgeführt. Das überraschende Ergebnis: Bilder sind kontraproduktiv. Vorurteile werden zu früh gefasst und sie sind leider zu oft falsch. Außerdem beharren die Versuchspersonen auf der einmal gefassten Meinung (Grams, 2001, S. 120).

„Die meisten Pädagogen sind überzeugt, der Stoff müsse möglichst anschaulich und konkret präsentiert werden. Zahlen zum Beispiel erscheinen deshalb in Büchern, Lehrvideos und Übungsprogrammen für den Computer gern mit sprechenden Gesichtern und tanzenden Figürchen. Nun zeigt sich, dass wohl das Gegenteil richtig ist" (DER SPIEGEL 42/2005, Seite 204).

Vladimir Sloutsky von der Ohio State University dazu: „The students were also more successful in applying what they learned to new situations when they were taught with abstract symbols rather than concrete objects."

Sloutsky spricht ferner von einer ganzen Reihe von Gründen, weshalb das Konkrete dem Lernen nicht gut tut: Die konkreten Objekte bieten ein Übermaß an Wahrnehmungsreizen, die vom Wesentlichen ablenken können; die konkreten Objekte sind kaum „übertragbar“. Für ein Kind kann ein einfacher Stock ein Auto, ein Raumschiff oder eine Blume sein. Demgegenüber kann es sich unter einer Modelleisenbahn wohl kaum eine Blume vorstellen. Er schließt: „Less structured entities make better symbols, and these generic symbols are easier to learn.“

Praxis kontra Theorie

„An konkreten Beispielen lässt sich leichter lernen als mit Theorien.“ Was ist daran verkehrt?

Bereits ein wenig Kenntnis von Biologie und Verhaltensforschung sollte Zweifel an der Volksweisheit wecken: Alles Leben ist theoriegetränkt. Einen Theorie-Praxis-Gegensatz kann es aus prinzipiellen Gründen gar nicht geben. Ludwig Boltzmann sagte in seiner Rede „Über die Bedeutung von Theorien“ am 16. Juli 1890 in Graz: „Fast wäre man versucht, zu behaupten, dass, ganz abgesehen von ihrer geistigen Mission, die Theorie auch noch das denkbar praktischste, gewissermaßen die Quintessenz der Praxis sei.“

Ohne Theorie kommt nicht einmal die Amöbe aus: Wenn sie irgendwo anstößt, versucht sie es in einer anderen Richtung erneut. Dabei folgt sie der eingebauten „Theorie“, dass da etwas sein muss, das nicht von allein verschwindet.

Unsere Mittel zur Weltbeherrschung gehen nun einmal über diejenigen der Amöben und der Meisen hinaus, auch wenn letztere uns überlegen sind, wenn es darum geht, ganz alltagspraktisch und konkret, die Verstecke von tausenden von Samenkörnern zu memorieren.

Zur Beherrschung unserer anspruchsvollen Theorien haben wir die Symbole entwickelt. Sie sind durch und durch alltagspraktisch. Sie sind Lehr- und Lernmittel. Unter pädagogischen Gesichtspunkten bilden sie keinen Gegensatz zur ebenfalls erforderlichen Anschauung.

Am Max Planck Institut für Bildungsforschung in Berlin wurde ein gar nicht so überraschendes Ergebnis herausgefunden (Rötger, 2005): „Gerade bei den schwächeren Kindern bewirkte das alltagsnahe Programm am wenigsten, während das abstrakte Programm zum größten Lernfortschritt führte. Elsbeth Stern erklärt dies damit, dass leistungsstärkere Kinder von alleine mathematische Strukturen auch in alltagsnahen Aufgaben erkennen, während die Schwächeren dazu gezielte Unterstützung und Anregung benötigen.“

Der Sprung heraus aus dem System

Die Scheu vor den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, bildet sich offenbar in der Schulzeit heraus, wie verschiedene Studien zeigen. Die Einschätzung, das Fach Physik sei bedeutend, nimmt im Laufe der Schulzeit zu (von unter 50 % auf über 70 %). Gleichzeitig fällt das Interesse für dieses Fach von 60 % auf 40 % (Muckenfuß, 1995, S. 84).

Das darin zum Ausdruck kommende Auseinanderdriften von *subjektivem Interesse* (gering) und *allgemeiner Bedeutungszuschreibung* (hoch) entspricht einer zunehmenden Trennung in *Eingeschüchterte* einerseits und Experten andererseits.

Auf einer „Krisensitzung“ der Volkshochschule wird beraten, wie man den Leuten die Naturwissenschaften mundgerecht nahe bringen kann. Ein Teilnehmer schwimmt gegen den Strom: Wir versuchten immer, den Leuten klar zu machen, wie einfach die Naturwissenschaften sind. Er glaube nicht, dass man so das Interesse wecken könne. Medizin und Juristerei seien vergleichsweise hoch angesehen. Und in diesen Fächern finde man ein ganz anderes Verhalten: Man stelle sich als Elite dar, zu der jedermann gern gehören möchte; und für die Erreichung dieses Ziel sei dann jede Anstrengung gerechtfertigt.

Vielleicht ist es tatsächlich so: Indem wir den Schülern und Studenten immer wieder sagen, dass alles gar nicht so schwer ist, und indem wir mit Bildern und Animationen die scheinbare Harmlosigkeit darstellen, nehmen wir dem Thema die Faszination.

Im Extremfall ist es so, dass der Lehrer dem Schüler die Sache nahe bringt, ohne dass der Schüler sich von sich aus der Sache nähert. Aktiv ist der Lehrer – passiv der Lernende. Der Lehrer sorgt für mundgerechte und leicht verdauliche Bildungshäppchen, lockert das Ganze mit Bildern und Filmen auf (denn: Spaß muss sein). Er achtet darauf, dass alles in kleine Schubfächer passt, so dass der Denkapparat des Schülers möglichst nicht überlastet wird. Er stellt auch sicher, dass nach der termingerechten Erledigung dieser Wissensportionen im Rahmen einer Klausur später nicht mehr darauf zurückgegriffen wird. Die Schubfächer unterliegen nämlich der ökonomischen Mehrfachnutzung: Vom abgehakten Wissen restlos gesäubert sind sie aufnahmebereit für neue Wissensportionen.

Wen wundert's, dass in dieser Lage ein Schüler den Lehrer fragt: „Was wollen sie tun, damit ich bestehe?" (Mitgeteilt von Hellmut Scheuermann, Hofheim im Taunus.)

Solcherart *andienende Pädagogik* ist weder gerecht noch sozial. Ihre Folgen sind

- Oberflächliches Entertainment und Verlust der Freude am Problemlösen
- Konsumentenhaltung und Passivität
- Beschränkung auf Routinetätigkeiten, auf etwas also, das der Computer besser kann
- Verlust der Fähigkeiten zur Abstraktion und zum Denken in Konzepten
- Schubfachdenken anstelle vernetzten Denkens

Nicht nur an den Schulen sieht es so aus. In dieselbe Richtung geht der aktuelle Trend, Hochschulen als Dienstleistungsunternehmen zu sehen. Dahinter steckt die Vorstellung, dass vornehmlich die Hochschulen zu liefern haben. Der Kunde Student ist der Abnehmer. Er soll nach diesem Denkmuster zukünftig ja auch vermehrt zur Zahlung für die Lieferungen herangezogen werden. Konsequenterweise haben Hochschulen heute ein Marketing und ein Corporate Design. Es ist, als müssten sie Kosmetikartikel unter das Volk bringen.

Hinter diesen Tendenzen steckt wieder die Philosophie des Abholens. Aber: Abholen funktioniert nicht. Was hilft dann?

Mit der Aufforderung „Seid neugierig!" ist nicht voranzukommen. Sie ist offensichtlich unerfüllbar – eine Paradoxie wie „Sei spontan!" (Watzlawick, Weakland, Fisch, 1992).

Verlangt ist ein *Sprung heraus aus dem System*. Zweifel und Irrtum sind die Denkauslöser in der Wissenschaft, warum nicht auch hier?

Gelingendes Lernen startet mit einem Gefühl der Unwissenheit, die hilflos macht. Am Anfang muss eine bewegende Frage stehend, „bewegend im Sinne von beunruhigend" (Wagenschein, 1968, S. 86).

Ich schlage als Startpunkt aller pädagogischen Bemühungen vor, *Betroffenheit* zu erzeugen. Und das Mittel dafür ist die *Konfrontation mit dem Unvollkommenen*.

Das geht so: Beschäftigung mit Unfallforschung und Ursachenanalyse, Diskreditierung der einfachen Antworten („Der Pilot war schuld"), Auflehnung gegen die alltäglichen Reinfälle, Entzauberung der glatten und täuschenden (Bedien-)Oberflächen, Aufzeigen von *Denkfallen* und schwer lösbaren *Problemen*.

Der hier verfolgte Denkansatz ist nicht neu. Walter Lietzmann, Georg Pólya, Max Wertheimer, Martin Wagenschein und andere haben Bahn Brechendes geleistet.

Die produktive Auseinandersetzung mit dem Unvollkommenen kann echte Freude bereiten: „Hindernisse überwinden ist der Vollgenuss des Daseins" (Arthur Schopenhauer). Felix von Cube, der Verhaltensbiologe und Erziehungswissenschaftler, drückt es so aus: „Lust ohne Anstrengung ist ein Langweilefaktor. Die verdiente Belohnung von Anstrengung erfahren wir intensiver." Seiner Meinung nach liegt das daran, dass der Mensch von der Evolution für eine harte Wirklichkeit – sozusagen für den Ernstfall – programmiert ist und nicht für das Schlaraffenland (Cube, 1995, S. 81).

Bestandteile dieses Lehrkonzepts sind Zweifel, Umwege, das Zulassen von Vielfalt, Offenheit für außergewöhnliche Ansätze, Diskussion. Der Lehrer muss sagen dürfen: „Hier weiß ich auch nicht weiter.“ Das Ertragen von Unsicherheit und Ungewissheit gehört zu den Lehrzielen.

Denkfallen

Am meisten lernt man aus den eigenen Reinfällen. Aber: Ein kluger Mann macht nicht alle Fehler selber; er gibt auch anderen eine Chance (Winston Churchill). Lietzmanns Werk beispielsweise ist ganz diesem Gedanken gewidmet (1962, 1982).

Das Lernen aus eigenen Fehler und denen anderer ist eine Grundhaltung des Ingenieurs.

Definition

Die Beschäftigung mit den Gesetzmäßigkeiten von Denkfallen, ihren Auswirkungen und den Techniken für ihre Vermeidung lohnt sich. Auf meiner Internetseite DENKFALLEN UND PARADOXA ist – neben vielen Beispielen – auch das *System der Denkfallen* zu finden, eine Taxonomie. Ich gehe von der folgenden Definition der Denkfalle aus:

> Eine *Denkfalle* tut sich auf, wenn eine Problemsituation einen bewährten Denkmechanismus in Gang setzt, und wenn dieser Denkmechanismus mit der Situation nicht zurechtkommt und zu Irrtümern führt.

Solche Denkfallen können Ursachen von riskanten Manövern, Fehldiagnosen, Design-, Programmier- und Bedienfehlern sein. Auf Denkfallen fällt man fast zwangsläufig herein. Es sei denn, man ist darauf gefasst. Ist der Argwohn erst einmal geweckt, lässt sich der Reinfall vermeiden. So wie man den optischen Täuschungen beispielsweise durch Anlegen eines Maßstabs entgehen kann, so lassen sich *kognitive Täuschungen* aufgrund von Denkfallen durch die Anwendung von Logik und Mathematik vermeiden.

Für diesen Vortrag greife ich als Beispiel eine Programmierstudie heraus.

Eine Programmierstudie

Einer Gruppe von 19 Studenten eines Programmierpraktikums gebe ich die folgende Aufgabe: Nehmen Sie einmal an, die „<“-Relation des Computers funktioniert nicht. Die Pascal-Funktion LESS(a, b: REAL): BOOLEAN soll genau dann den Wert TRUE liefern, wenn a<b ist. Wie lässt sich das realisieren?

Hier die Antworten von 19 Befragten:

- Fünfmal: IF b-a>0 THEN less:= TRUE ELSE less:= FALSE
- Zweimal: IF (a>b) OR (a=b) THEN less:= FALSE ELSE less:= TRUE
- Viermal: IF b>a THEN less:= TRUE ELSE less:= FALSE
- Dreimal: IF NOT(a>=b) THEN less:= TRUE ELSE less:= FALSE
- Zweimal: less:= NOT(a>=b)
- Einmal: less:= b>a
- Zweimal: IF a>=b THEN less:= FALSE ELSE less:= TRUE

Analyse: Alle Lösungen sind korrekt. Die einfachste Lösung ist am schwersten zu finden: less:= b>a. Boolesche Ausdrücke scheinen „funktional“ an Entscheidungen (IF …) „gebunden“ zu sein, was nicht stimmt. Ein *Einstellungseffekt*. Die Reihenfolge der Variablen scheint unabänderlich zu sein, was nicht stimmt. Eine Folge der *Strukturerwartung*. Einstellung (Psychological Set) und Strukturerwartung stellen uns so manche Denkfalle.

Problemlösen

Die üblichen Aufgaben lassen sich mit nahe liegenden Methoden und nach bekannten Regeln lösen. Das macht vielleicht ein wenig Spaß; aber echte Freude kommt dabei nicht auf. Anders ist das bei Problemen: Es gibt Widerstände auf dem Weg zur Lösung. Feste Regeln fehlen und man muss auf Entdeckungsreise gehen. Entsprechend hoch ist der Lustgewinn im Erfolgsfalle.

Auch das Explorieren lässt sich trainieren. Es gibt Vorgehensweisen, die dem Denken auf die Sprünge helfen, die *Heuristiken.* Schon das Wort drückt die Freude am Problemlösen aus: Heureka! – ich hab’s gefunden – soll Archimedes bei der Entdeckung der Gesetze des Auftriebs freudig ausgerufen haben. Eine Heuristik ist also ein *Lösungsfindeverfahren*. Im nächsten Unterabschnitt habe ich die wichtigsten dieser Heuristiken zusammengestellt. Anschließend führe ich an einem Beispiel vor, wie Heuristiken beim Problemlösen helfen können.

Was ich hier erzähle, ist im Grunde die Methode von Georg Pólya. Er hat sie in seinem herrlichen Bändchen „Schule des Denkens“ (1945) beschrieben und vorgeführt. Pólya unterweist Lehrer in einer Fragetechnik, mit der sie Schülern zu neuen Erkenntnissen verhelfen können. Pólyas Methode wurde von den Informatikern aufgegriffen und sie genießt besonders auf dem Feld des Algorithmenentwurfs große Wertschätzung (Michalewicz, Fogel, 2000). Wir sollten sie an die Schule zurückbringen.

Eine Lehr- und Lernmethode mit ähnlicher Zielsetzung hat Max Wertheimer (1945) auf der Grundlage der Gestaltpsychologie entwickelt.

Heuristiken – Neues finden, indem man sich die richtigen Fragen stellt

Probleme sind - anders als Aufgaben - nicht mit Routineverfahren zu lösen. Es gibt Hindernisse auf dem Weg zur Lösung und es kann zu Denkblockaden kommen. Bei der Lösung von Problemen geht es immer auch darum, etwas Neues, bisher so noch nicht Gedachtes, hervorzubringen. Für das Hervorbringen des Neuen kann es keine zwingenden Regeln geben. Freie Assoziationen und der Zufall spielen mit.

Gute Heuristiken sind gering an Zahl. Hier habe ich einmal acht der wichtigsten Heuristiken zusammengestellt. Sie bilden eine gute Basis für produktives Denken. Jede Heuristik wird erläutert durch die Fragen, die man sich stellen sollte. Im Unterricht stellt der Lehrer den Schülern diese Fragen und steuert damit den Lösungsprozess.

Analogie

> Habe ich etwas Ähnliches schon einmal gesehen? Kenne ich ein verwandtes Problem?

Generalisierung

> *Einbettungsprinzip:* Bringt mich der Übergang von einem Objekt zu einer ganzen Klasse von Objekten weiter? Lässt sich das Problem in Teile oder einzelne Stufen zerlegen?
>
> *Invariante:* Lassen sich Aussagen finden, die für jedes Objekt, für jedes Teil oder für jede Stufe gültig sind und die zur Problemlösung beitragen?
>
> *Nachbarschaftsbeziehungen:* Lassen sich Zusammenhänge herstellen zwischen den Aussagen und Variablen für die verschiedenen Teile bzw. Stufen? Sind die *vollständige Induktion* oder der *Schleifensatz* (Rule of Iteration, Hoare, 1969) anwendbar?

Spezialisierung

Komme ich weiter, wenn ich zunächst einmal einen leicht zugänglichen Spezialfall löse?

Variation

Kann ich durch die Veränderung der Problemstellung der Lösung näher kommen? Kann man das Problem anders ausdrücken?

Rückwärtssuche

Hilft es, wenn ich beim gewünschten Resultat anfange? Welche Operationen können mich zu diesem Ergebnis führen?

Teile und herrsche

Lässt sich das Problem in leichter lösbare Teilprobleme zerlegen?

Vollständige Enumeration

Kann ich mir Lösungen verschaffen, die wenigstens einen Teil der Zielbedingungen erfüllen? Kann ich mir sämtliche Lösungen verschaffen, die diese Bedingungen erfüllen?

Es geht (fast immer) einfacher

Ist die gefunden Lösung schön? Ist die Herleitung, gemessen am Ergebnis, einfach und elegant? Wenn nein: Alternativen suchen!

Ein Problem: Kuchen teilen

Gegeben ist ein kreisrunder Kuchen. Auf dem Rand des Kuchens sind *n* Punkte ausgewählt. Zwischen je zwei Punkten wird ein gerader Schnitt gemacht. Angenommen wird, dass kein Punkt des Kuchens von mehr als zwei Schnitten getroffen wird. Jeder Kreuzungspunkt von Schnitten gehört also zu genau zwei Schnitten (Bild 1). Wie groß ist die Zahl der Kuchenstücke? (Cohen 1990)

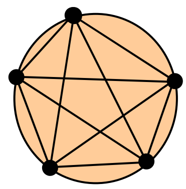

Bild 1 Kuchen teilen mit fünf Randpunkten

Lösung des Problems „Kuchen teilen“

Es gibt eine wirklich elegante Lösung des Problems. Ich nehme an, dass es genau die voreilige Präsentation solcher windschnittigen Lösungen ist, die den Novizen abschrecken: „Wie soll man da nur draufkommen?“ Und schon liegt die „Flinte im Korn“.

Besser ist wohl, die Schüler und Studenten alles selbst machen zu lassen – mit kleinen Hilfen nach Pólyas Methode. Bei der Lösung kommt es zu Umwegen. Aber schließlich stellt sich nach überstandenen Schwierigkeiten das Glücksgefühl ein. Und gleichzeitig verliert die Mathematik ihre Schrecken.

Meine Lösung war zunächst überhaupt nicht einfach und elegant. Dabei habe ich einen typischen Expertenfehler gemacht: Ich bin die ausgetretenen Pfade gegangen, die ich seit dem Studium kenne: Aufstellen einer Differenzengleichung, Lösung mit der Direktansatzmethode.

Der Novize wird andere Fehler machen. Vielleicht fällt ihm unerträglich lange gar nichts ein. Dann ist eine behutsame Hilfe durch den Lehrer angezeigt – immer im Sinne Pólyas: Nur Fragen im Sinne der allgemeinen Heuristiken sind erlaubt. (Ich habe das mit Studenten gemacht, und sie haben im Laufe einer Doppelstunde tatsächlich selber den berühmten Time-Warp-Algorithmus der Spracherkennung erfunden!)

Auch diese Erkenntnis ist wichtig: Selbst die Meister ihres Faches haben nicht sofort die elegante Lösung parat gehabt. Auch sie sind Umwege gegangen. Und dabei haben sie auch den einen oder anderen kapitalen Bock geschossen.

Ich erinnere an Lagranges Irrtum bei der Herleitung des Multiplikatorensatzes der Variationsrechnung und an die Herleitung der Fourier-Reihe durch Joseph Fourier, der „zwei Annahmen von geradezu schreiender Widersprüchlichkeit" gebrauchte (Davis, Hersh, 1985). Die Feinheiten der Beweisführung und die letztendliche Eleganz wurden dann durch die Gemeinde der Mathematiker geliefert (De Millo, Lipton, Perlis, 1979).

Erstmals habe ich das Kuchenproblem 1991 in einer Lehrveranstaltung zum Thema „Beweisgeleitetes Programmieren" behandelt. Ich werde im Wesentlichen meinen Lösungsprozess dokumentieren und dabei die Anwendung von Heuristiken verdeutlichen. Dabei lässt sich auch das Fine-Tuning des Beweises studieren, das aus dem ausgiebigen Gebrauch der Es-geht-einfacher-Heuristik resultiert.

Der Leser muss nun nicht alle meine Gedankenwindungen ablaufen. Die Formeln können wie Wegmarken gelesen werden. Es geht um die Vorgehensweise, nicht um die Details.

Lösungsvorschlag 1

Spezialisierung: Die Zahl der Kuchenstücke für kleine *n* ist in der Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1

n	Anzahl
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Generalisierung: Für die allgemeine Lösung, also für alle *n*, setze ich für die Anzahl der Kuchenstücke die Funktion $f(n)$ an. Gesucht ist nun ein allgemeiner Ausdruck für diese Funktion (Invariante).

Nachbarschaftsbeziehungen: Es wird versucht, eine Beziehung zwischen dem Ausdruck $f(n)$ und dem Ausdruck $f(n+1)$ herzustellen.

Angenommen, der Ausdruck $f(n)$ ist für *n* Punkte schon bekannt. Auf der nächsten Stufe kommt ein weiterer Randpunkt hinzu. Von diesem Punkt geht zu jedem der vorhandenen Punkte je ein Schnitt. Der Schnitt zum Punkt 1 liefert ein weiteres Kuchenstück. Der Schnitt zum Punkt 2 kreuzt alle Schnittlinien des ersten Punkts zu den Punkten 3 bis *n*. Das sind *n*-2 Schnittpunkte und *n*-1 neue Kuchenstücke. Die Schnittlinie zu Punkt *k* kreuzt die Schnittlinien der Punkte 1 bis *k*-1, die diese zu jeweils *n*-k Punkten haben. Das sind insgesamt (*k*-1)(*n*-k) Kreuzungspunkte. Dabei entstehen (*k*-1)(*n*-k)+1 neue Kuchenstücke. Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang (Rekursion, Differenzengleichung):

Tabelle 2

n	$\sum_{k=1}^{n-2} k^2$	$f(n)$
1	0	1
2	0	2
3	1	4
4	5	8
5	14	16
6	30	31
7	55	57
8	91	99
9	140	163
10	204	256
11	285	386
12	385	562
13	506	794
14	650	1093
15	819	1471
16	1015	1941
17	1240	2517
18	1496	3214
19	1785	4048
20	2109	5036

$$f(n+1) = f(n) + \sum_{k=1}^{n} ((k-1)(n-k) + 1) = f(n) + n + \sum_{k=1}^{n-2} k(n-k-1)$$

Für die effiziente Berechnung der Summe wird sie zerlegt:

$$\sum_{k=1}^{n-2} k(n-k-1) = (n-1)\sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{n-2} k^2 = (n-2)(n-1)^2/2 - \sum_{k=1}^{n-2} k^2$$

So wird die Rekursionsvorschrift zu

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n^3}{2} - 2n^2 + \frac{7}{2}n - 1 - \sum_{k=1}^{n-2} k^2$$

Die Formel für f ist reichlich kompliziert. Aber die Formel lässt sich tabellarisch (beispielsweise mit einem Tabellenkalkulationsprogramm oder von Hand) auswerten. Das müsste Schülern in der Sekundarstufe II gelingen. Die Tabelle 2 zeigt die ersten 20 Werte.

Die Studierenden erwerben im Grundstudium der Hochschule die Fähigkeit, selbst eine geschlossene Lösung des Problems herzuleiten, beispielsweise mit der Direktansatzmethode.

Zunächst findet man, dass $\sum_{k=1}^{n-2} k^2 = (n-2)(n-1)^2$ und damit

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{4}{3}n$$

Der Direktansatz $f(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ führt schließlich auf die folgende Formel.

$$\boxed{f(n) = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24} + 1}$$

Lösungsvorschlag 2

Es geht einfacher: Ich suche nach weiteren *Invarianten*, die eine einfachere Lösung des Problems ermöglichen könnten. Ausgegangen wird vom Fall mit n Randpunkten. Betrachtet werden die Schnittlinien, die von einem Punkt ausgehen – und zwar der Reihe nach und im Uhrzeigersinn. Die erste Schnittlinie hat keinen Kreuzungspunkt, die zweite hat n-3 Kreuzungspunkte, die nächste (n-4)·2, usw. Das macht insgesamt $\sum_{k=1}^{n-3}(n-k-2)k$ Kreuzungspunkte.

Das kann man für jeden der n Randpunkte durchführen. Da insgesamt jeder Kreuzungspunkt viermal gezählt wird, nämlich von jedem der zugehörigen vier Randpunkte aus einmal, ist die Zahl g der Kreuzungspunkte gegeben durch

$$g = \frac{n}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n-3}(n-k-2)k = \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24}$$

Die Anzahl der Schnittlinien s ist bestimmt durch

$$s = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nun suche ich noch nach einer Beziehung zwischen f, g und s.

Spezialisierung: Ich stelle einige Werte für f, g und s in der Tabelle 3 zusammen.

Tabelle 3

n	*g*	*s*	*f*
1	0	0	1
2	0	1	2
3	0	3	4
4	1	6	8
5	5	10	16

Generalisierung: Die Tabelle legt die Vermutung $f = g+s+1$ nahe.

Beweis durch vollständiger Induktion: Die Relation $f(n) = g(n)+s(n)+1$ gilt jedenfalls für n=1 (s. obige Tabelle). Wir setzen sie als gültig für n voraus. Nun nehmen wir einen weiteren Peripheriepunkt hinzu: $n \to n+1$. Von diesem Punkt aus kommen n Schnittlinien hinzu: $s \to s+n$. Mit der i-ten Schnittgeraden kommen x_i Kreuzungspunkte und x_i +1 Kuchenstückchen hinzu. Die Anzahl der neuen Kreuzungspunkte ergibt sich zu $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Also gilt: $g(n+1)=g(n)+x$. Die Anzahl neuer Kuchenstückchen ist gleich $x + n$. Und damit gilt:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + x + n \\ &= g(n) + s(n) + 1 + x + n \end{aligned}$$

$= (g(n) + x) + (s(n) + n) +1$
$= g(n{+}1) + s(n{+}1) +1$

Das war zu beweisen.

Auswertung der Formel $f(n) = g(n)+s(n)+1$ liefert das bereits unter Lösungsvorschlag 1 angegebene Resultat.

Lösungsvorschlag 3

Es geht einfacher, Analogie: Ich erinnere mich an die Eulersche Polyederformel (Gardner, 1980). Für nichtleere zusammenhängende planare Graphen gilt E-K+F=2. Dabei ist E die Zahl der Knoten, K die Zahl der Kanten und F die Zahl der Flächen, wobei die den Graphen umgebende Fläche mitgezählt wird. Die Zahl der Kuchenstückchen ist um eins kleiner. In unserer Schreibweise ist $E=g+n$ und $F = f+1$. Gesucht ist nun noch die Zahl der Kanten. Zu den Kanten zählen die n Peripherieabschnitte zwischen den Randpunkten sowie die s Schnittlinien, die durch die Kreuzungspunkte weiter aufgeteilt werden. Jeder der g Kreuzungspunkte liefert, da er zwei Schnittlinien aufteilt, weitere zwei Kanten. Also ist die Zahl der Kanten insgesamt gegeben durch $K = n+s+2g$.

Eingesetzt in die Eulersche Polyederformel ergibt das die Gleichung $g+n - (n+s+2g) + f+1=2$. Also: $f= s + g + 1$. Damit haben wir die Gültigkeit der obigen Vermutung noch einmal aus der Eulerschen Formel hergeleitet.

Lösungsvorschlag 4

Es geht einfacher: Quälend und unschön ist die Herleitung der Formel für die Zahl der Kreuzungspunkte $g(n)$. Es müsste doch einen einfachen Zusammenhang zwischen der Zahl der Randpunkte und der Zahl der Schnittpunkte geben!

Ich setzte mich jetzt auf einen der Schnittpunkte und schaue von dort aus in die Welt. Entlang der Schnittlinien sehe ich genau vier Randpunkte und erkenne: Je vier Randpunkte definieren einen Schnittpunkt. Die Zahl der Schnittpunkte ist also gleich der Anzahl Auswahlmöglichkeiten 4 aus n:

$$g = \binom{n}{4}$$

Nun haben wir eine wirklich schöne Formel für die Zahl der Kuchenstückchen, nämlich die Invariante:

$$f(n) = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1$$

Die explizite Darstellung als Polynom von n haben wir oben bereits gesehen.

Wo bleibt die Praxisorientierung?

Es gibt unter den Lehrern an Schule und Hochschule die Auffassung, dass von Anfang an praxisnah zu lehren sei. Für alles, was man lehrt, soll nach deren Auffassung die Anwendung in Sichtweite sein. Sie meinen, dass nur auf diese Weise praxisrelevantes Wissen vermittelt werden könne. Außerdem könne man so die Lernenden besser bei Laune halten. Sie könnten ja stets unmittelbar sehen, wofür die ganze Plackerei gut ist.

Dem halte ich entgegen: Eine strikte Praxisbindung führt zu einer lückenhaften und trivialisierten Lehre. Praxiserprobung findet normalerweise in einem hoch komplexen Weltausschnitt statt. Ein Nachbau solcher Weltausschnitte für jeden Lehrzweck ist ineffizient.

Nichts spricht gegen das spielerische Erkunden von Sachverhalten im Rahmen experimenteller Szenarien. Mancher meint aber, das Studium aus Motivationsgründen hauptsächlich auf Projektarbeit aufbauen zu müssen. Der Schüler oder Student soll von Anfang an Projekte bearbeiten.

Für Projektarbeit ohne ausreichende Grundlegung durch Fachsystematik gibt es einen Namen: Dilettantismus.

Projektarbeit sollte gegen Ende des Studiums in exemplarischer Form stattfinden. Erst dann haben die Studierenden genügend Techniken und Fertigkeiten erworben, die sie befähigen, die Komplexität in vollem Umfang zu bewältigen.

Projekte, die ich meine, zeichnen sich durch konstruktive und kreative Elemente aus; sie sind in Teamarbeit zu bewältigen und folgen einem Vorgehensmodell; sie ziehen sich über ein ganzes Semester hin und nehmen einen beträchtlichen Teil der Wochenarbeitszeit der Studierenden in Anspruch. Und das Wichtigste ist, dass sie durch den Lehrenden konsequent kontrolliert werden. Solche Projekte stellen an alle Beteiligten die allerhöchsten Anforderungen und liefern schließlich – im Vergleich zu anderen Lehrformen – die größte Befriedigung.

Die *Lehre-Praxis-Verzögerung* stellt den Lehrer in unserer heutigen Gesellschaft vor eine schwere Aufgabe: Er muss die Praxisrelevanz seiner Lehre glaubwürdig darstellen, ohne sich in Praxisdetails zu verlieren. Er muss Techniken und Methoden lehren, wohl wissend, dass deren Nutzen erst später richtig spürbar wird. Dabei steht er vor einer Jugend, zu deren Erfahrung gehört, dass man Belohnung fast ohne Anstrengung und stets sofort bekommen kann.

Dieser Beitrag soll auch deutlich machen, wie der Lehrende die Lücke zwischen Lehre und Praxis überbrücken kann: An einer Denksportaufgabe aus einem Programmier-Lehrbuch zeige ich die Anwendung von Techniken, die im Algorithmenentwurf eine Rolle spielen. Die programmtechnischen Anwendungen liegen noch außerhalb des Erfahrungshorizonts der Schüler. Aber sie können an dem hier vorgebrachten Beispiel erahnen, welchen Nutzen das Erlernte „im Ernstfall“ hat.

An solchen Denksportaufgaben und Rätseln mit ihren von jedermann begreifbaren Problemstellungen ist nichts Verwerfliches, sie sind nicht L’art pour l’art. Sie folgen dem Gebot der *Weltorientierung der Mathematik.*

Kurz gesagt: Gute Lehre ist praxisorientiert, nicht praxisverhaftet.

Literaturhinweise

Bergmann, Wolfgang; Hüther, Gerald: Computersüchtig. Kinder im Sog der modernen Medien. Walter, Düsseldorf 2006

Claus, Volker: Rankings und „Wo studieren die Besten?“ Informatik-Spektrum 2005/2, S. 124-128

Cohen, Edward: Programming in the 1990s – An Introduction to the Calculation of Programs. Springer, New York 1990

Cube, Felix von: Gefährliche Sicherheit. Die Verhaltensbiologie des Risikos. Hirzel, Leipzig 1995

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben: Erfahrung Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel 1985

De Millo, Richard, A.; Lipton, Richard, J.; Perlis, Alan J.: Social Processes and Proofs of Theorems and Programs. Communications of the ACM 22 (1979) 5, 271-280

Gardner, Martin: Mathematische Spielereien. Ein mathematischer Zoo phantastische Kreaturen. Spektrum der Wissenschaft (1980) 12, 8-13

Grams, Timm: DENK$_{\text{FALLEN}}$ UND PARADOXA. Aus meiner Sammlung von Problemen, Denkfallen und Paradoxa (www.fh-fulda.de/~grams/dnkfln.htm)

Grams, Timm: In Mathe schwach. PISA und andere Erhebungen richtig deuten. Fuldaer Elektrotechnik-Seminar vom 15. April 2005. Tagungsband (als Pdf-Datei über meine Web-Page)

Grams, Timm: Grundlagen des Qualitäts- und Risikomanagements. Zuverlässigkeit, Sicherheit, Bedienbarkeit. Vieweg Praxiswissen, Braunschweig, Wiesbaden, 2001

Grams, Timm: Schöpferisches Denken in der Mathematik. Vortrag anlässlich der Hessischen Landestagung des Vereins MNU am 15.9.05 in Fulda (www.fh-fulda.de/~grams/ BildungWissenschaft/KreativeMathematik.pdf)

Haefner, Klaus: Computer und Bildung. Universität Bremen, Juni 1999

Hoare, C. A. R.: An Axiomatic Basis for Computer Programming . Comm. ACM 12 (1969) 10, pp. 576-580. Nachdruck in Broy, M.; Denert, E. (Eds.): Software Pioneers. Contributions to Software Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002, S. 367-383

Knieper, Thomas; Müller, Marion G. (Hrsg.): Authentizität und Inszenierung von Bilderwelten. Herbert von Halem Verlag, Köln 2003

Lietzmann, Walter: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formeln. Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen (11. Auflage) 1982

Lietzmann, Walter: Wo steckt der Fehler? Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen. Teubner, Stuttgart 1962

Litt, Theodor: Technisches Denken und menschliche Bildung. Quelle & Meyer, Heidelberg 1964

Michalewicz, Zbigniew; Fogel, David B.: How to Solve It: Modern Heuristics. Springer, Berlin, Heidelberg 2000

Muckenfuß, Heinz.: Lernen im sinnstiftenden Kontext. Entwurf einer zeitgemäßen Didaktik des Physikunterrichts. Cornelsen, Berlin 1995

Neuweiler, Gerhard: Der Ursprung unseres Verstandes. Spektrum der Wissenschaft 1/2005, S. 24-31

Paul, Dietrich: PISA, Bach, Pythagoras. Ein vergnügliches Kabarett um Bildung, Musik und Mathematik. Vieweg, Wiesbaden 2005

Pólya, Georg: How to Solve It. Princeton, N. J. 1945 (Deutsche Ausgabe: Schule des Denkens)

Rötger, Antonia: Zahlenstrahl zündet Geistesblitze. FOKUS. Max Planck Forschung 1/2005, S. 32-37

Sloutsky, Vladimir: Students learn better when the numbers don't talk and dance. Ohio State University, Research Communications, 10.10.2005

Spitzer, Manfred: Computer in der Schule. Nervenheilkunde 24 (2005) 5, 355-358

Spitzer, Manfred: Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 2002. S. 223 ff. („Computer im Kinderzimmer?“)

Wagenschein, Martin: Verstehen lehren. Beltz, Weinheim, Basel 1968

Watzlawick, Paul; Weakland, John, H.; Fisch, Richard: Lösungen. Zur Theorie und Praxis menschlichen Wandels.Verlag Hans Huber, Bern, Göttingen, Toronto, 1992

Wertheimer, Max: Produktives Denken. Harper & Brothers, New York, London 1964 (Original: Productive Thinking. 1945)