

Gewichte

Lösung

Diese Seiten gehören zur Lektion „Lösungsfindeverfahren (Heuristiken)“. Es wird gezeigt, wie Heuristiken bei der Lösung eines Problems helfen können.

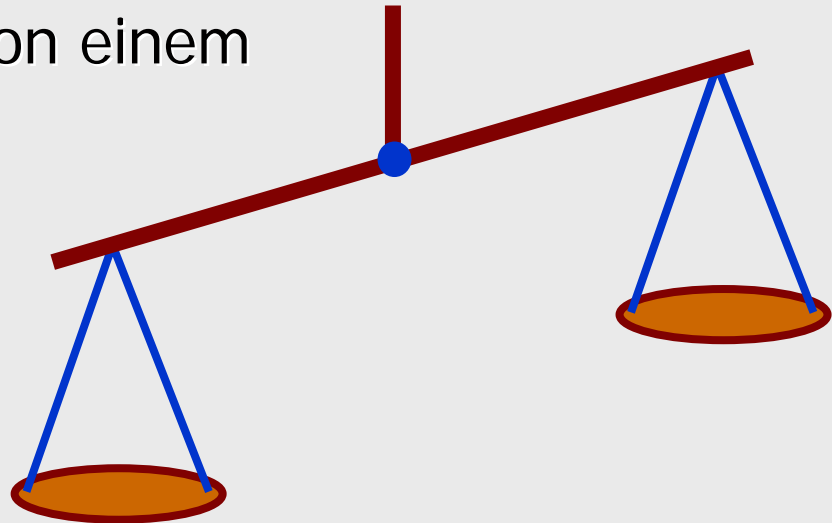
Die Lösung erfolgt Schritt für Schritt nach folgendem Muster: Zunächst wird eine passende Heuristik ausgewählt und zu einem Plan verdichtet. Führen Sie den Plan selber aus, bevor Sie weiterschalten. Auf den nächsten Seiten finden Sie dann eine Ausführung des Plans, die Sie mit Ihrer Lösung vergleichen können.

Für diese Lektion wählen Sie in Acrobat Reader am besten die *Ganzseitenansicht* und schalten die Seiten mit den Bildwechseltasten weiter. So erhalten Sie den Effekt einer Diaschau.

Gewichte

Mit drei Gewichten von insgesamt zehn Kilogramm und einer Balkenwaage sollen alle ganzzahligen Gewichte von einem bis zehn Kilogramm auszuwiegen sein. Wie sind die zehn Kilogramm auf die Gewichte aufzuteilen?

Wie groß müssen vier Gewichte sein, damit es möglich ist, mit ihnen alle ganzzahligen Gewichte von einem bis vierzig Kilogramm auszuwiegen?



Heuristik: Vollständige Enumeration

Kann ich mir Lösungen verschaffen, die wenigstens einen Teil der Zielbedingungen erfüllen? Kann ich mir sämtliche Lösungen verschaffen, die diese Bedingungen erfüllen?

Wir haben es mit zwei Bedingungen zu tun:

1. Die Summe der drei Gewichte beträgt zehn Kilogramm.

2. Mit den drei Gewichten sollen alle Gewichte von eins bis zehn Kilogramm auszuwiegen sein.

Wir verschaffen uns zunächst sämtliche Lösungen der ersten Bedingung und sehen dann nach, welche davon auch die zweite Bedingung erfüllen.

Ausführung

Vollständige Enumeration: Ordnet man die Gewichte nach Größe, so gibt es folgende Möglichkeiten der Gewichtsaufteilung:

1, 1, 8

1, 2, 7

1, 3, 6

1, 4, 5

2, 2, 6

2, 3, 5

2, 4, 4

3, 3, 4

Ausführung

Welche dieser Kombinationen erlauben das Auswiegen aller Gewichte von einem bis zehn Kilogramm?

Mit den Gewichten 1, 1 und 8 kann man folgende Gewichte darstellen:

1

2 ($=1+1$)

6 ($=8-1-1$)

7 ($=8-1$)

8

9 ($=8+1$)

10 ($=8+1+1$)

Da fehlen die Gewichte 3, 4 und 5. Diese Aufteilung der Gewichte ist also ungeeignet.

Ausführung

Gehen wir das für alle Gewichtskombinationen durch, finden wir diejenigen Kombination heraus, die auch die zweite der Bedingungen erfüllen.

1	1	8	nein
1	2	7	ja
1	3	6	ja
1	4	5	nein
2	2	6	nein
2	3	5	nein
2	4	4	nein
3	3	4	nein

Ausführung

Gehen wir das für alle Gewichtskombinationen durch, finden wir diejenigen Kombination heraus, die auch die zweite der Bedingungen erfüllen.

1	1	8	nein
1	2	7	ja
1	3	6	ja
1	4	5	nein
2	2	6	nein
2	3	5	nein
2	4	4	nein
3	3	4	nein

Die Kombinationen **(1, 2, 7)** und **(1, 3, 6)** erlauben das Auswiegen aller Gewichte von 1 bis 10. Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Grenzen der vollständigen Enumeration

Im zweiten Teil der Aufgabe geht es darum, 40 kg auf 4 Gewichte so aufzuteilen, dass lückenloses Auswiegen damit möglich ist. Die vollständige Enumeration ist hier – jedenfalls für die Rechnung von Hand – keine sinnvolle Sache mehr. Wenn es um noch mehr Gewichte geht, stößt auch der Computer an seine Grenzen. Wir brauchen eine neue Heuristik.

Heuristik: Generalisierung

Bringt mich der Übergang von einem Objekt zu einer ganzen Klasse von Objekten weiter?

Wir lösen nicht nur das Problem für vier Gewichte, sondern wir betten dieses Problem in eine allgemeine Problemstellung ein: Wir fragen, wie n Gewichte beschaffen sein müssen, so dass man einen möglichst großen Wertebereich lückenlos auswiegen kann.

Unter diesen Problemen sind ganz einfache - der Fall $n=1$ beispielsweise.

Dann versuchen wir, n schrittweise zu erhöhen. Wir nutzen also die Lösung für die einfachen Probleme um zu Lösungen für die schwierigeren zu kommen.

Das hier angewandte *Einbettungsprinzip* ist eine Spielart der Generalisierung.

Ausführung

Wir nehmen einmal an, dass wir das Problem für n gelöst haben: Wir kennen die Gewichte g_1, g_2, \dots, g_n mit denen wir sämtliche Gewichte von 1 bis S_n auswiegen können. Dabei ist $S_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n$.

Wir kennen bisher nur die Werte $S_1 = g_1 = 1$. Wir schließen nun von n auf $n+1$: Da wir alle Gewichte bis zu S_n vom neuen Gewicht g_{n+1} abziehen können, sollte der Wert des neuen Gewichts so groß sein, dass sich mittels dieser Differenz der nächste bisher noch nicht darstellbare Wert, nämlich $S_n + 1$, gerade noch auswiegen lässt. Das führt auf die Gleichung $S_n + 1 = g_{n+1} - S_n$. Anders ausgedrückt: $g_{n+1} = 2 \cdot S_n + 1$.

Auf Grund dieser Beziehungen können wir die Werte für g_n und S_n in einer Tabelle Zeile für Zeile ermitteln.

Ausführung

n	g_n	S_n
1	1	1
2	3	4
3	9	13
4	27	40
5	81	121
6	243	364

Ausführung

Damit haben wir auch die Lösung des zweiten Teilproblems:

Mit den Gewichten 1, 3, 9 und 27 lassen sich alle Gewichte von 1 bis 40 auswiegen. Fertig.