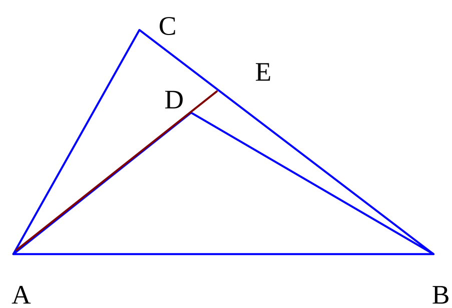
Lösungen zur Problemsammlung „Querbeet“

Timm Grams, Fulda, 3. Juli 2004 (15.01.13)

Inhaltsverzeichnis

Lösungsvorschläge

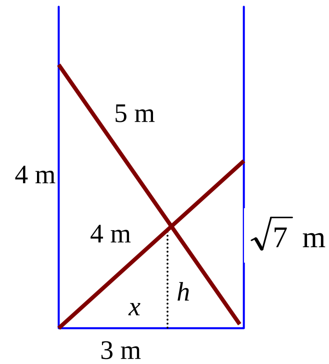
1 Eine Beweis



Dass der Umfang des Dreieck ABD kleiner ist als der Umfang des Dreiecks ABC erkennt man, indem man die Problemstellung etwas verändert: Eine Seite des äußeren Dreiecks wird in eine Seite des inneren Dreiecks hineingedreht – so wie das in der Skizze gezeigt ist. Der Umfang des Dreiecks ABE ist kleiner als der des Dreiecks ABC, denn die Strecken AC und CE werden durch die Strecke AE ersetzt, und letztere muss wegen der Dreiecksungleichung kleiner als die Summe aus AC und CE sein. Aus demselben Grund ist BD kleiner als DE plus BE. Also: der Umfang des inneren Dreiecks ist nochmals kleiner als das Dreieck ABE. Folglich muss es auch kleiner als das Dreieck ABC sein.

2 Stäbe im Brunnen

Der Satz des Pythagoras sagt uns, dass die Stäbe in einer Höhe von 4 m bzw. $\sqrt{7}$ m die Wand berühren (s. Skizze). Mit x bezeichnen wir den Abstand des Schnittpunkts von der linken Wand. Der Strahlensatz liefert die beiden Beziehungen $h/\sqrt{7}\text{ m} = x/3\text{ m}$ und $h/4\text{ m} = (3\text{ m} - x)/3\text{ m}$. Indem man jeweils linke und rechte Seite der beiden Gleichungen addiert, eliminiert man x. Es ergibt sich $h = \frac{4\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$ m.

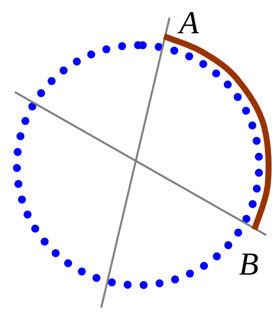


3 Wie alt sind die Söhne?

Die Zahl 36 lässt sich so in Primfaktoren zerlegen: 36 = 2·2·3·3. Allerdings können die Söhne auch 1 Jahr alt sein. Möglich sind also folgende Alter: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 und 36. Insgesamt ergeben sich die folgenden Kombinationen: (1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 3, 12), (1, 4, 9), (1, 6, 6), (2, 2, 9), (2, 3, 6) und (3, 3, 4). Zählt man die Alterszahlen jeweils zusammen, erhält man als Summen 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11 und 10. Da der Mathematiker über die Summe noch nicht den richtigen Fall herausfinden konnte, muss es sich um die Summe 13 gehandelt haben. Sie gehört zu den Fällen (1, 6, 6) und (2, 2, 9). Nur im letzten Fall gibt es *einen* ältesten Sohn. Der älteste Sohn ist also 9 Jahre alt. Die beiden jüngeren müssen Zwillinge im Alter von 2 Jahren sein.

4 Halbkreis

Es geht um die folgende Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei unabhängig und rein zufällig gewählte Punkte eines Kreises auf einem Halbkreis liegen?



Wenn ich diese Frage einem Publikum stelle, dann erhalte ich Schätzwerte, die oft unterhalb von 50% und manchmal gar bei nur 25% liegen. Dabei liegen die ersten beiden Punkte, nennen wir sie einmal A und B, mit hundertprozentiger Sicherheit auf einem Halbkreis. Für den dritten Punkt C muss die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er auf einem Halbkreis mit den anderen liegt, deutlich über 50% liegen.

Mit elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung versuchen wir, die Schätzung zu verbessern. Wir verändern die Aufgabenstellung geringfügig, indem wir uns den Halbkreis aus einer endlichen Zahl von gleichmäßig über die Peripherie verteilten Punkten zusammengesetzt vorstellen. Die Zahl dieser Punkte sei gleich $2n$. Die beiden Punkte A und B mögen einen Bogen aus k Punkten aufspannen. Dabei ist der kürzere der beiden möglichen Bögen zu nehmen.

Die möglichen Bögen erfüllen die Bedingung $1 \le k \le n$. Diese Bedingung schließt aus, dass zwei einander gegenüberliegende Punkte auf einem Halbkreis liegen. Denn in diesem Fall wäre die Zahl der Punkte des Halbkreises genau n+1, egal wie herum man geht.

Abgesehen von k = 1 hat jeder der Werte k dieselbe Wahrscheinlichkeit $1/n$. Für k = 1 ist die Wahrscheinlichkeit nur gleich $1/(2n)$, also halb so groß.

Der dritte Punkt C liegt nur dann mit den ersten beiden auf ein und demselben Halbkreis, wenn er nicht in die „verbotene Zone“ gegenüber vom aufgespannten Bogen fällt. Diese verbotene Zone besteht ebenfalls aus k Punkten. Die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Punkt in eine verbotene Zone der Größe k fällt, ist gleich $k/(2n)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verbotene Zone die Größe k hat UND der Punkt in die verbotene Zone fällt, ist folglich gleich $k/(2n^2)$. Dabei rechnen wir zunächst einfachheitshalber auch für k=1 mit dieser Formel.

Die Wahrscheinlichkeit p, dass die drei Punkte NICHT auf einem Halbkreis liegen, ist die Summe all dieser Werte:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1+1/n}{4} .$$

Für große n strebt p gegen 1/4 oder 25 %. Dass wir für k=1 einen um $1/(4n^2)$ zu großen Wert eingesetzt haben, hat keinen Einfluss auf dieses Resultat, denn dieser Fehler geht bei wachsendem n gegen null.

So haben wir die Antwort auf die ursprüngliche Frage erhalten: Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ fällt der dritte Punkt nicht in die verbotene Zone. Also liegen drei Punkte mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % auf einem Halbkreis.

5 Die drei Wägungen

Wir versehen die Kugeln mit den Nummern 1, 2, ..., 12. Vor dem ersten Wiegen gibt es 24 mögliche Fälle: 1L, 1S, 2L, 2S, 3L, 3S, ..., 12L, 12S. Dabei steht 1L für „Die Kugel 1 ist leichter als die anderen“ usw. Ein Wiegevorgang kann drei verschiedene Resultate zeigen: Die linke Schale sinkt, die rechte Schale sinkt oder beide Schalen sind im Gleichgewicht.

Durch geschickte Aufteilung der Kugeln auf die Schalen ist dafür zu sorgen, dass durch eine Wägung die Zahl der Fälle möglichst stark reduziert wird. Es darf jeweils nur etwa ein Drittel der Fälle übrig bleiben, egal wie der Wiegevorgang ausgeht. Sonst schafft man es nicht. Also: Nach dem ersten Wiegevorgang dürfen nur noch höchstens 9 Fälle übrig bleiben, und nach dem zweiten höchstens 3.

Für den ersten Wiegevorgang führen dieser Vorüberlegungen nach etwas Probieren zu folgender Aufteilung der Kugeln: Die Kugeln 1, 2, 3 und 4 werden auf die linke Schale gelegt, und die Kugeln 5, 6, 7 und 8 auf die rechte. Ergebnisse[1]:

(1, 2, 3, 4) < (5, 6, 7, 8): Übrig bleiben die acht Fälle 1L, 2L, 3L, 4L, 5S, 6S, 7S, 8S. Im zweiten Wiegevorgang vergleichen wir die Kugeln 1, 2, 3 und 5 mit den Kugeln 4, 9, 10 und 11.

> (1, 2, 3, 5) < (4, 9, 10, 11): Es bleiben die Fälle 1L, 2L, 3L. Im dritten Wiegevorgang vergleichen wir nur noch die Kugeln 1 und 2 miteinander. Ist (1)<(2), dann ist die Nummer 1 die leichte Kugel. Ist (1)=(2), dann ist Nummer 3 die leichte Kugel. Und für (1)>(2) ist es die Nummer 2.
>
> (1, 2, 3, 5) = (4, 9, 10, 11): Es bleiben die Fälle 6S, 7S, 8S. Der dritte Wiegevorgang ist analog zum eben behandelten Fall und liefert die schwerere Kugel.
>
> (1, 2, 3, 5) > (4, 9, 10, 11): Übrig bleiben die Fälle 4L und 5S. Eine der beiden Kugeln wird im dritten Wiegegang mit einer der bekannten Kugeln verglichen (beispielsweise mit der Kugel Nummer 9). Damit fällt die Entscheidung.

---

[1] „<“ steht für „leichter“, „>“ für „schwerer“ und „=“ für „gleich schwer“.

(1, 2, 3, 5) > (5, 6, 7, 8): Dieses Ergebnis entspricht dem vorhergehenden Fall. Die Kugeln 1, 2, 3 und 4 tauschen mit den Kugeln 5, 6, 7 und 8 nur die Rollen.

(1, 2, 3, 4) = (5, 6, 7, 8): Es bleiben die 8 Fälle 9L, 9S, 10L, 10S, 11L, 11S, 12L, 12S. Im zweiten Wiegevorgang vergleichen wir die Kugeln 9, 10, 11 mit den Kugeln 1, 2, und 3. Ergebnisse:

> (1, 2, 3) < (9, 10, 11): Es bleiben die Fälle 9S, 10S, 11S. Weiter: siehe oben.
>
> (1, 2, 3) > (9, 10, 11): Es bleiben die Fälle 9L, 10L, 11L. Weiter: siehe oben.
>
> (1, 2, 3) = (9, 10, 11): Es bleiben die Fälle 12L, 12S. Weiter: siehe oben.

6 Drei Kandidaten und fünf Hüte

Der siegreiche Kandidat ist nur der schnellste unter den dreien. Er stellt, wie die anderen auch, folgende Überlegung an: „Hätte ich einen blauen Hut auf, könnte jeder der beiden anderen Kandidaten je einen roten und einen blauen Hut sehen. Da die beiden nicht dumm sind, würde jeder von ihnen sich Folgendes denken:

> ‚Hätte ich einen blauen Hut auf, würde der mit dem roten Hut zwei blaue Hüte sehen und sofort merken, dass er einen roten Hut aufhaben muss. Denn: für ihn ist kein blauer Hut übrig. Da er sich nicht meldet, muss meine Annahme falsch sein. Ich muss einen roten Hut aufhaben. Am besten ich melde mich, bevor der andere mit dem roten Hut auf dieselbe Idee kommt.’

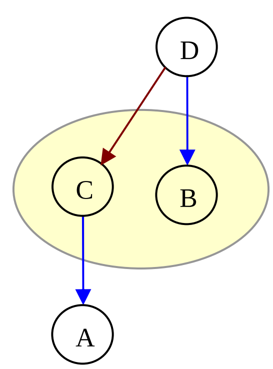
Da keiner der beiden sich meldet, muss meine Annahme falsch sein. Mein Hut kann nicht blau sein. Er ist rot. Am besten ich gebe diese Antwort, bevor es ein anderer tut.“

(Das ist eine besonders schöne Anwendung der Technik des *indirekten Beweises*.)

7 Mathematiker und Physiker

Der Physiker legt die Schallplatte mit dem Loch auf den Scheitelpunkt des zu drittelnden Winkels. Dann markiert er die Punkte P_1, P_2 auf der Schallplatte, an denen die Schenkel des Winkels unter der Platte hervorkommen. Anschließend rollt er die Schallplatte entlang einer Geraden auf einem Papier ab und überträgt dabei P_1 und P_2 auf die Gerade. Diese Strecke kann er nun problemlos mit Zirkel und Lineal auf der Grundlage des Strahlensatzes dritteln. Diese zusätzliche Markierung überträgt der Physiker nun wieder durch Abrollen auf die Platte. Dann legt er die Platte auf den Winkel, so dass das Loch auf den Scheitel und die ursprünglichen Markierungen auf die Schenkel zu liegen kommen. Die neue Markierung wird nun auf das Blatt Papier übertragen und mit dem Scheitel verbunden. Das war’s.

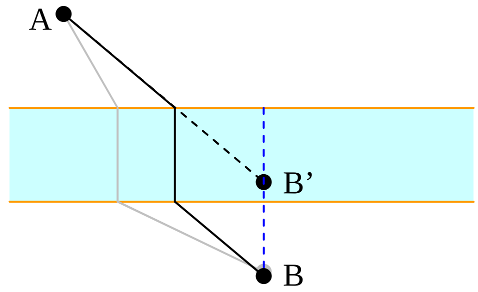
8 Das Porträt



Oft wird die falsche Antwort gegeben: „Es ist ein Bild des Mannes selbst.“ Marilyn vos Savant veröffentlichte das Rätsel in ihrer Kolumne und rief mit der beigefügten richtigen Antwort („Der Mann steht vor einem Bild seines Sohnes“) einen Sturm der Entrüstung hervor. Falls Sie die Lösung auch nicht überzeugt: Machen Sie sich eine Skizze. Wir nennen B den Betrachter und A den abgebildeten Mann. Mit C bezeichnen wir den Vater von A, und mit D den Vater von B. „Dieses Mannes Vater ist meines Vaters Sohn“ bedeutet nun nichts anderes, als dass D auch der Vater von C ist. Weil B aber keine Geschwister hat, muss B gleich C sein.

Das heißt: Der Betrachter des Bildes ist der Vater des Abgebildeten.

9 Die Brücke



Wir variieren das Problem etwas und stellen uns den Fluss zu einem Bach der Breite null geschrumpft vor. Dazu verschieben wir das Südufer des Flusses zusammen mit der Stadt B gedanklich nach Norden (s. Skizze). B wandert also in Gedanken nach B’. Die Lösung dieses Sonderfalls ist eine gerade Verbindung zwischen den Städten. Nun variieren wir die Problemstellung erneut, indem wir das Südufer des Flusses und die Stadt wieder zurückverlegen. Jetzt ist klar, wo die Brücke zu stehen hat.

10 Würfelspiele

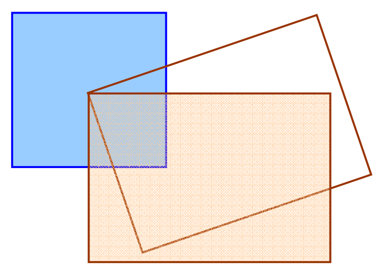
Es empfiehlt sich hier, zunächst jeweils die Chancen für das Verlieren zu ermitteln. Bezüglich des Gewinnens muss man nämlich mehrere Fälle in Betracht ziehen, während für das Verlieren nur der Fall zu betrachten ist, dass bei keinem der Würfe das ersehnte Ergebnis erscheint.

Keine Sechs erscheint mit der Wahrscheinlichkeit 5/6. Viermal hintereinander passiert das mit der Wahrscheinlichkeit $(5/6)^4 \approx 48$ %. Die Gewinnchancen beim ersten Spiel betragen also etwa 52 %.

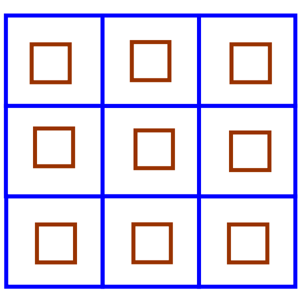
Nun zum zweiten Spiel: Zwei Sechsen erscheinen mit der Wahrscheinlichkeit $(1/6)^2 = 1/36$. Mit der Wahrscheinlichkeit 1- 1/36 oder 35/36 muss man damit rechnen, dass das nicht passiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es 24mal hintereinander nicht passiert, ist gleich $(35/36)^{24} \approx 51$ %. Die Gewinnchancen sind beim zweiten Spiel also geringer als beim ersten, nämlich etwa gleich 49 %.

11 Claims

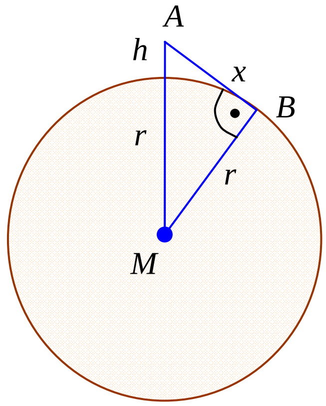
Wir variieren die Problemstellung, indem wir Toms Grundstück um den Eckpunkt, der in der Mitte von Lems Grundstück liegt, drehen. Wir tun das so, dass schließlich die Seiten der Grundstücke zueinander parallel sind. Jetzt ist klar ersichtlich: Toms Grundstück überlappt ein Viertel des Grundstücks von Lem. Dieser Anteil ändert sich durch die Drehung nicht, denn: das Dreieck, das wegfällt ist kongruent dem Dreieck, das dazukommt. Toms Anteil an dem Goldfund beträgt somit 1/8 oder 12,5 %.



12 Münzenspiel



Genau dann, wenn der Mittelpunkt der Münze von jedem Rand des betreffenden Quadrats wenigstens den Abstand von 8 mm hat, liegt die Münze vollständig in einem solchen Quadrat. Die Mittelpunkte müssen also innerhalb von Quadraten der Seitenlänge 30 mm - 16 mm = 14 mm zu liegen kommen. Unter der Annahme, dass die Mittelpunkte der Eincentstücke keinen Ort der Fläche bevorzugen, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gegeben durch das Flächenverhältnis der kleinen Quadrate zu den großen Quadraten, also gleich $\frac{(14\,\text{mm})^2}{(30\,\text{mm})^2} = (\frac{7}{15})^2 \approx 22\,\%$.



13 Wie weit sieht der Astronaut?

Wir stellen uns die Erde als ideal kugelförmig vor und erinnern uns an die ehemals gültige Definition der Maßeinheit Meter: Das Urmeter in Paris sollte den 40-millionsten Teil des Erdumfangs darstellen. Daraus ergibt sich für den Erdradius r die Formel[2] r = 40 000 km/(2π), also $r \approx 6366$ km.

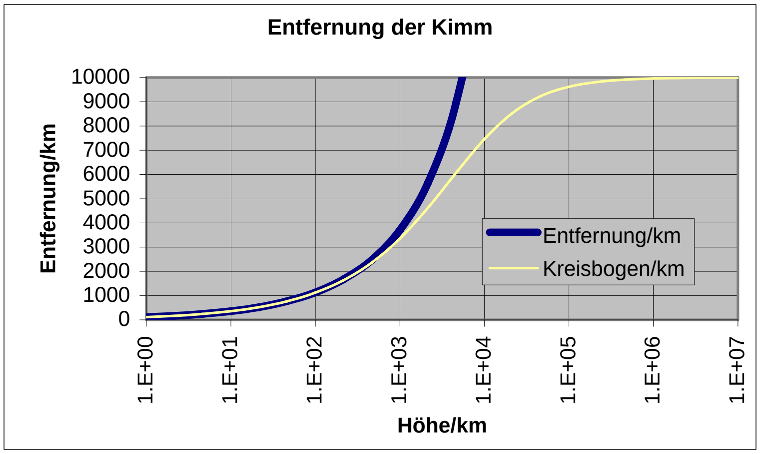
Höhe	Entfernung
1 m	3,6 km
2,154 m	5,2 km
4,642 m	7,7 km
10 m	11,3 km
21,54 m	16,6 km
46,42 m	24,3 km
100 m	35,7 km
215,4 m	52,4 km
464,2 m	76,9 km
1 km	112,8 km
2,154 km	165,6 km
4,642 km	243,1 km
10 km	357,0 km
21,54 km	524,2 km
46,42 km	770,2 km
100 km	1132,8 km

Unter Vernachlässigung der Lichtbrechung in der Atmosphäre nehmen wir an, dass sich das Licht geradlinig ausbreitet. Mit A bezeichnen wir den Ort des Astronautenauges, B ist ein Punkt des sichtbaren Horizonts und M der Erdmittelpunkt. Die Strecke AB steht senkrecht auf BM.

Mit x bezeichnen wir den Abstand des Astronautenauges vom sichtbaren Horizont; das ist die Länge der Strecke AB. Die Höhe des Astronautenauges über der Erdoberfläche sei h. Der Satz des Pythagoras liefert die Gleichung $(r+h)^2 = r^2+x^2$. Daraus ergibt sich $x = \sqrt{(2r+h)h}$.

Der sichtbare Horizont ist in 100 km Höhe demnach etwa 1133 km weit entfernt. Ist der Astronaut über Marseille, kann er Berlin gerade noch sehen. Die skandinavischen Länder liegen für ihn bereits hinter dem Horizont[3].

Für weitere Höhen sind die zugehörigen Entfernungen zur Kimm in der Tabelle aufgeführt. In der Grafik ist für noch größere Höhen auch die Länge des Kreisbogens vom „Fußpunkt“ des Astronauten bis zum sichtbaren Horizont angegeben. Er hat die Länge $r \cdot \arccos(r/(r+h))$.



[2] Tatsächlich ist der Radius einer volumengleichen Kugel gleich 6371 km.

[3] Aufgrund der Lichtbrechung in der Atmosphäre reicht die Sicht noch etwa 9 % weiter.

14 Unendlich viele x

Wir versuchen es einmal damit, dass wir die linke und die rechte Seite der Gleichung $3 = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}}$ quadrieren:

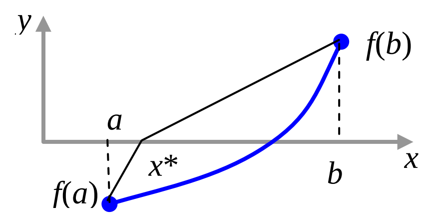
$$9 = x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}} \text{ oder } 9 - x = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist aber voraussetzungsgemäß gleich 3. Also ergibt sich $9 - x = 3$ und schließlich $x = 6$. Wenn es überhaupt eine Lösung für x gibt, dann diese.

15 Jahrhundertentdeckung

Sie haben vielleicht gemerkt, dass die von mir ermittelte Formel für x^* nichts anderes als die Regula falsi ist. Und die liefert im allgemeinen nicht den exakten Wert. Was stimmt an meiner Herleitung nicht?

Ich habe eine Formel für die Nullstelle x^* hergeleitet, ohne überhaupt die Nullstelleneigenschaft zu benutzen! Nirgends fordere ich, dass $f(x^*) = 0$ sein soll. Der Ansatz funktioniert auch dann noch, wenn x^* irgendwo auf der reellen Achse liegt.



Wenn ich die Nullstelleneigenschaft nicht fordere, kann sie – im allgemeinen Fall – auch nicht herauskommen.

Dafür habe ich später $x = x^*$ angenommen und die Rechnung auf dieser Basis fortgesetzt. Zu allem Überfluss dividiere ich die Gleichung (*) auf der linken und auf der rechten Seite auch noch durch x-x^*, also durch null, und eliminiere damit die einzige plausible Lösung.

Was sich nach der Kürzung ergibt, ist eine Relation, die dafür sorgt, dass die Gleichheit für alle x gilt. Das heißt: Die Geraden fallen zusammen und bilden genau die Verbindungsgerade, die zur Herleitung der Regula falsi herangezogen wird.

16 Wie heißt der Lokführer?

Die Aufgabenstellung sagt viel über die Wohnorte. Aus diesem Umweg sollte detektivischer Gewinn zu ziehen sein. Es ist die Rede von drei Orten: Chicago, New York und einem Ort dazwischen, den ich hier einmal „Mittendrin“ nenne. Aus a) und c) ergibt sich eine erste tabellarische Zuordnung, nämlich:

Chicago	*Mitten-drin*	*New York*
Dr. Babbitt	Schaffner	

Aus b) und d) folgt: Da der Nachbar des Schaffners genau das Dreifache verdient, kann dieser Nachbar nicht Dr. Jones sein, denn 2 500 ist nicht durch drei teilbar. Auch Dr. Babbitt ist nicht sein Nachbar – der wohnt ja in Chicago. Demnach muss Dr. Miller sein Nachbar sein. Damit ergibt sich die folgende Zuordnung:

Chicago	*Mittendrin*	*New York*
Dr. Babbitt	Dr. Miller	
	Schaffner	

Wegen e) heißt der Schaffner Jones und Dr. Jones wohnt in New York. Damit erhalten wir diese Zuordnung.

Chicago	*Mittendrin*	*New York*
Dr. Babbitt	Dr. Miller	Dr. Jones
	Schaffner (Jones)	

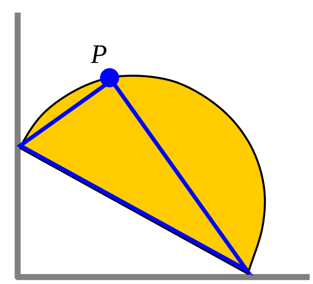
Die Aussage f) liefert die Erkenntnis, dass der Heizer nicht Miller heißen kann. Weder der Schaffner noch der Heizer heißen Miller. Also muss Miller der Lokführer sein. Damit haben wir die Lösung des Problems.

Im Laufe des Lösungsprozesses waren hier im Wesentlichen zwei Dinge zu tun:

1. Für die Suchräume[4] bzw. deren Beschränkungen ist eine geeignete Darstellungsform zu finden. Hier genügte eine einfache Zuordnungstabelle.
2. Auf jeder Stufe des Lösungsprozesses ist eine passende logische Bedingunge auszuwählen, die den Suchraum der folgenden Stufe weiter einschränkt.

17 Rutschende Halbkreisscheibe (Protokoll eines Lösungsprozesses)

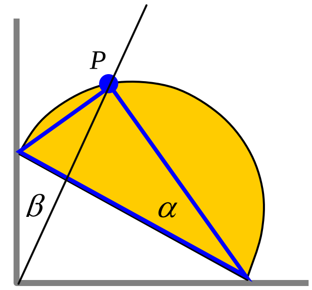
Um ein Gefühl für das Problem zu bekommen, wird erst einmal experimentiert. Man schaut sich also den einen oder anderen *Spezialfall* einmal an. Das geht auf verschiedene Arten und Weisen, beispielsweise mit einer Halbkreisscheibe aus Pappe.



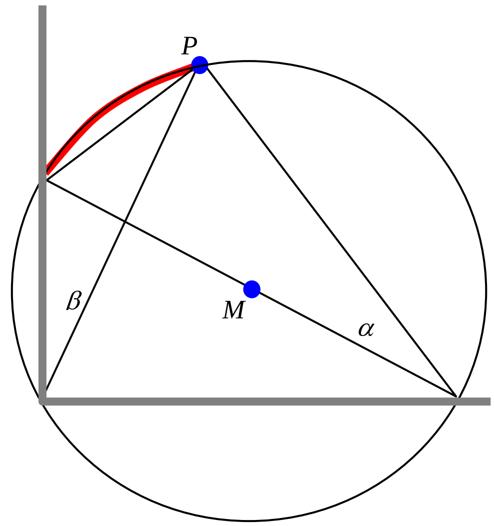
Ich mache die Experimente mit einem Grafikprogramm. Anstelle der Halbkreisscheibe zeichne ich das durch den Punkt P gegebene rechtwinklige Dreieck über der Geraden des Halbkreises. Der Kreisbogen wird so zum Thales-Kreis. Die Gerade der Halbkreisscheibe ist die Hypotenuse des Dreiecks. Das Bild der Experimente ist ganz unten wiedergegeben. Blau eingezeichnet sind die Extrempositionen des rechtwinkligen Dreiecks.

Nun zur *Generalisierung:* Das Bild legt die Hypothese nahe, dass der Punkt P sich auf einer Geraden bewegt, die durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels geht. Diese Gerade ist rot und gestrichelt eingezeichnet.

Für den *Beweis*, dass die Gerade tatsächlich der gesuchte geometrische Ort für die Bewegung des Punktes P ist, legen wir die nebenstehende Skizze zu Grunde. Wir müssen nur zeigen, dass der Winkel β stets – also in jeder Position der rutschenden Halbkreisscheibe – so groß wie der Winkel α ist.



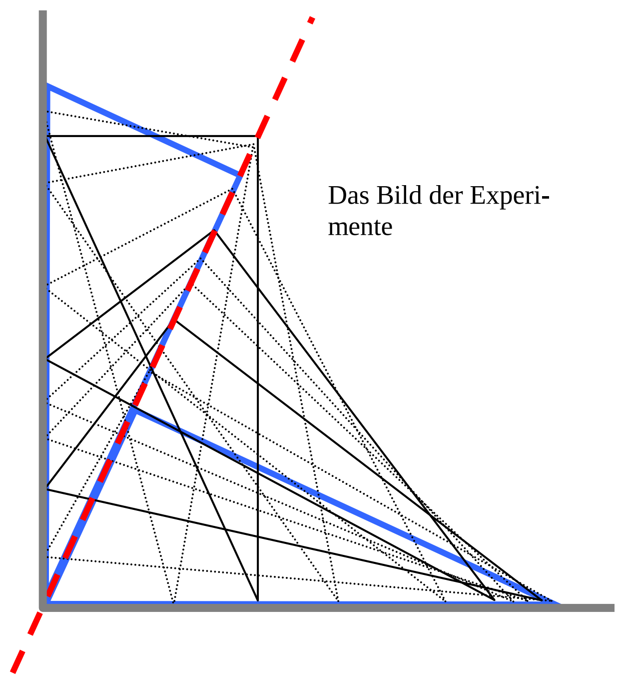
[4] Statt Suchraum heißt es auch Lösungs- oder Erfüllungsmenge.



Nach einigen fruchtlosen Versuchen mit der Berechnung von Winkeln unter Ausnutzung der Rechtwinkligkeit, greife ich auf die *Analogie-Heuristik* zurück: Habe ich etwas Ähnliches schon einmal gesehen? Kenne ich ein verwandtes Problem?

In meiner Denkfallen-Sammlung taucht das Problem der rutschenden Leiter auf. Von daher ist bekannt, dass sich der Mittelpunkt *M* der Hypotenuse auf einem Viertelkreis bewegt. Der Mittelpunkt dieses Viertelkreises liegt im Scheitpunkt des rechten Winkels. Und dieser Viertelkreis hat denselben Radius wie die Halbkreisscheibe. Wenn man den Halbkreisbogen der Halbkreisscheibe zu einem vollen Kreis vervollständigt, muss die Kreislinie durch den Scheitel des rechten Winkels gehen[5]. Das ist in der nebenstehenden Skizze zum Beweis dargestellt.

Der in der Skizze rot und fett markierte Kreisbogen wird von jedem Punkt des komplementären Kreisbogens unter jeweils demselben Winkel gesehen (Satz vom Umfangswinkel). Also müssen die Winkel α und β gleich sein. Damit ist der Beweis erbracht.



Das Bild der Experimente

[5] Das hätte man auch gleich sehen können: Der volle Kreis ist Thales-Kreis der beiden in der Figur auftretenden rechtwinkligen Dreiecke. Der hier dargestellte Lösungsprozess bot diese Erkenntnis erst ganz zum Schluss – warum auch immer. Und genau das sollte hier gezeigt werden: Lösungswege führen selten geradewegs zum Ziel. Zur Mathematik gehören das Probieren, das Prüfen und das Vereinfachen.

18 V

Es handelt sich um eine Reihe von Beweisaufgaben. Lösungsvorschläge gibt es hier – wie angekündigt – nicht.

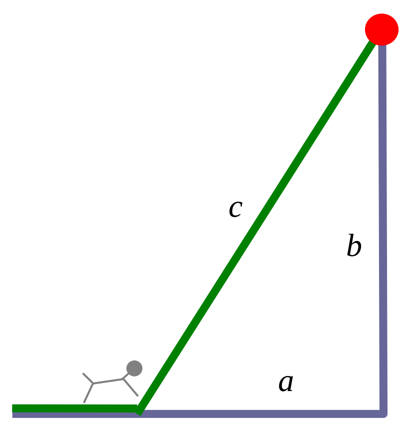
19 Das Ballfang-Problem

Der Hund, Elvis genannt, sprang „im Durchschnitt genau an der Stelle ins Wasser, die auch rechnerisch am günstigsten war. Die Schlussfolgerung war unausweichlich: Elvis hatte *auf seine eigene Art und Weise ein Problem* für Collegestudenten aus der Differentialrechnung gelöst.“ So berichtet es uns Keith Devlin.

Die Begeisterung für die Fähigkeiten des Hundes wird der Tierliebhaber nachvollziehen können. Dem Überschwang kann man aber zweierlei entgegenhalten: Erstens vermag Elvis Daten der Umgebung zwar instinktiv richtig zu verrechnen. Differentialrechnung ist das aber noch lange nicht.

In einem zweiten Punkt finde ich Devlins Bemerkungen wirklich bedauerlich, denn er verweist für die Lösung des Problems auf die Differentialrechnung. Ich nenne das die „Ochsentour“: Berechne die Längen der Teilstrecken in Abhängigkeit vom „Absprungpunkt“. Errechne daraus den Zeitbedarf als Funktion dieses Punktes. Finde das Minimum dieser Funktion. Nutze aus, dass die Kurve an der Minimalstelle eine horizontale Tangente besitzt. Berechne diesen Ort mittels einer notwendigen Bedingung, die du von der Differentialrechnung her kennst („Ableitung gleich null“). Das ist Sekundarstufen-II-Routine – jedenfalls keine kreative Mathematik.

Zunächst wählte auch ich die „Ochsentour“. Die Lösung stand bald da. Aber beim Überprüfen kamen mir Zweifel. Ich merkte, dass ich gerechnet hatte, ohne das Problem so recht zu durchdringen.

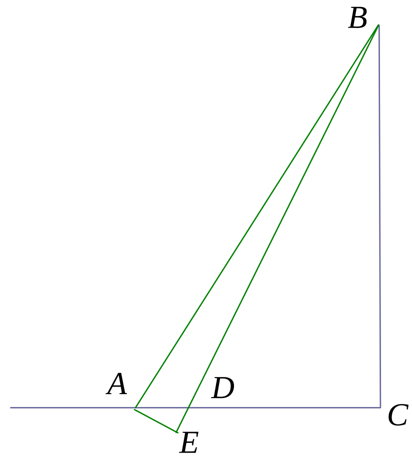


Ich fragte mich: Braucht man bei einem so einfachen Problem wirklich so schwere Geschütze wie die Differentialrechnung? Und ich kam zum Schluss: Man braucht sie nicht. Man kommt mit einer um 2000 Jahre älteren Mathematik aus, mit elementarer Geometrie. Und damit sind wir wieder im Rahmen dieser Aufgabensammlung, beim Stoff der Sekundarstufe I.

Als Erstes stellt man fest, dass es gar nicht so sehr darauf ankommt, ob der Hund am Ufer zehn, zwanzig oder hundert Meter läuft. Ausschlaggebend ist der Abstand des Absprungpunkts von der dem Ball am nächsten liegenden Uferstelle, vom Fußpunkt des Balles. Ich nenne diesen Abstand a. Und mit b bezeichne ich den Abstand des Balles vom Ufer. Der Hund möge um den Faktor p schneller rennen als schwimmen.

Die Frage lautet nun: Wie groß ist das günstigste a in Abhängigkeit von p und b?

Mit jedem Satz, den der Hund entlang des Ufers macht, verringert sich die Länge a der uferseitigen Kathete und auch die Länge c der Hypotenuse. Der Hund sollte in dem Moment ins Wasser springen, wenn die Verringerung des c die Verringerung des a nicht mehr aufwiegt. Das ist dann der Fall, wenn die Verringerung von a genau das p-fache der Verringerung von c beträgt.



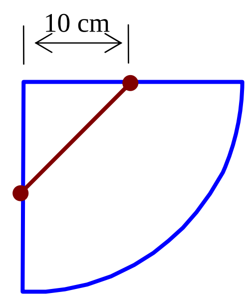
Wie nun verändert sich *c*, wenn sich *a* um einen kleinen Hundesatz verringert? Die Situation ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

Die Hypotenuse wird um den Ballpunkt herum leicht verschwenkt. Es entsteht ein Dreieck *ADE*. Die uns interessierenden Strecken, um die sich *a* bzw. *c* verringern, sind $\overline{AD}$ und $\overline{DE}$.

Der Winkel $\angle EAB$ ist nahezu rechtwinklig. Folglich ist der Winkel $\angle DAE$ in etwa gleich dem Winkel $\angle ABC$. Auch $\angle AED$ ist nahezu rechtwinklig. Das Dreieck *DAE* ist dem rechtwinkligen Dreieck *ABC* näherungsweise ähnlich. Je kleiner der „Verschwenkungswinkel“ ist, umso mehr ähneln sich die beiden Dreiecke.

Der Strahlensatz liefert: $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{AC}$. Daraus folgt $\overline{AD}:\overline{DE}=\overline{AB}:\overline{AC}$. Im Absprungpunkt – so haben wir oben festgestellt – muss das Streckenverhältnis $\overline{AD}:\overline{DE}$ gleich *p* sein. Die Hypotenusenlänge im größeren Dreieck ergibt sich zu $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$. Insgesamt liefert der Strahlensatz also $p=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ oder $p=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Diese Beziehung wird nach dem gesuchten Verhältnis der Streckenlängen *a* und *b* aufgelöst: $\frac{b}{a}=\sqrt{p^2-1}$. Für große *p* gilt näherungsweise (und der Hund wird wohl, bei aller Hochachtung vor seinen Fähigkeiten, nicht genauer „kalkulieren“), dass das Streckenverhältnis *b*/*a* in etwa gleich *p* ist. Mit den Zahlen der Aufgabenstellung (*b* = 10 m, *p* = 10) ergibt sich für das günstigste *a* in etwa ein Meter.

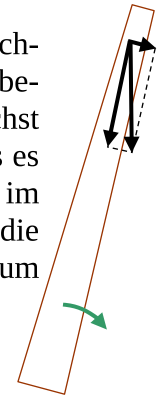
20 Der Weg des Käfers



Hier hilft etwas Basteln weiter: Man baut sich den Kegel (wenigstens in Gedanken) zusammen. Offenbar wickelt sich der Kegel zu einem Viertelkreis mit dem Radius 20 cm ab. Auf diesem Viertelkreis bewegt sich der Käfer auf einer Geraden. Der Satz des Pythagoras liefert das Ergebnis. Der Weg hat eine Länge von $10\cdot\sqrt{2}$ cm, also etwa 14,14 cm. Wer den Kegel tatsächlich baut, kann sich den Weg des Käfers von oben betrachten und sieht: Der Weg ist keineswegs glatt oder gar kreisförmig. Er hat in etwa Tropfenform.

21 Der fallende Schornstein

Der obere Teil des Schornsteins kommt bei der einsetzenden Drehbewegung nicht schnell genug mit, er bricht ab und sackt förmlich in sich zusammen. Warum das so ist, kann man sich recht einfach klar machen: Auf jeden Massepunkt des Schornsteins wirkt die Schwerkraft direkt nach unten. So lange der Turm senkrecht steht und seine Basis unversehrt ist, wirkt diese Kraft in Richtung Basis und der Turm bleibt stehen. Nun wird auf einer Seite die Basis weggesprengt. Die auf diesen Teil gerichteten Schwerkräfte erfahren keine entsprechende Gegenkraft mehr. Der Turm beginnt sich zu neigen, und zwar anfangs wie ein starrer Körper. Auf jeden Backstein des Schornsteins wirkt die Schwerkraft in der gleichen Weise. Wenn man diese Kraft in eine Kompenente zerlegt, die parallel zur Achse des Schornsteins verläuft und eine, die in Richtung der Bewegung zeigt, dann bewirkt nur letztere eine Beschleunigung. Diese beschleunigende Kraft ist für alle Backsteine gleich. Da sich der Schornstein zunächst aber wie ein Stab dreht, werden die unteren Backsteine langsamer beschleunigt, als es der Schwerkraft entspricht und die oberen deutlich schneller. Das heißt, dass im Schornstein Kräfte auftreten müssen, die die unteren Backsteine abbremsen und die oberen Backsteine beschleunigen. Und diese Kräfte sind es, die den Schornstein zum Brechen bringen.



22 Das erste Ass

Lösungsvorschlag 1: Intuitiv erkennt man, dass sich die Karten irgendwie gleichmäßig auf den Stapel verteilen. Das erste und das zweite Ass werden im Mittel wohl genauso weit voneinander entfernt liegen wie das zweite und das dritte, oder das dritte und das vierte. Was irritiert, ist, dass es ein Oben und ein Unten gibt. Anfangs- und Endstück des Stapels, also die Karten bis zum ersten Ass und die Karten hinter dem vierten Ass, passen nicht so recht ins Schema.

Wir behelfen uns mit einem Trick, der die Anfangs- und Endstücke verschwinden lässt: Wir stellen uns die Karten zyklisch angeordnet vor: Nach der letzten Karte geht es mit der ersten weiter. Dort wo der Zyklus aufgetrennt wird, fügen wir eine weitere Karte zur Markierung dieser Stelle ein, das „Markierungsass“. Wir sehen, dass sich das Problem nicht ändert, wenn wir jetzt den Stapel mit 53 Karten mischen und dann mit dem Aufdecken unmittelbar hinter dem „Markierungsass“ beginnen. Auf die letzte Karte folgt wieder das Markierungsass, so wird ein fünfter Abstand definiert. Nun ist klar: Die Verteilungen der fünf Abstände zwischen den Assen unterscheiden sich nicht. Die Abstände haben folglich auch denselben Mittelwert, und der muss genau ein Fünftel der Kartenanzahl sein. Bis zum ersten Ass sind demnach im Mittel 53/5 Karten aufzudecken.

Lösungsvorschlag 2 (verzichtet auf die Vorstellung eines Zyklus von Karten und bietet die Gelegenheit, den Umgang mit kombinatorischen Formeln einzuüben):

Eine einfache kombinatorische Formel liefert die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass das erste Ass auf Position k zu finden ist:

$$p_k = \frac{\binom{m-k}{n-1}}{\binom{m}{n}}.$$

Hierin ist m die Zahl der Karten insgesamt (m = 52) und n die Zahl der Asse (n=4). Im Zähler steht die Zahl aller Möglichkeiten dafür, dass die restlichen Asse im restlichen Kartenstapel zu finden sind; und im Nenner stehen alle möglichen Positionierungen sämtlicher Asse.

(Wer die weiteren Herleitungen eher ermüdend findet, kann sich hier schon an den Rechner setzen und den Erwartungswert für den konkreten Fall der vier Asse in 52 Karten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ermitteln.)

Der Erwartungswert E für die Position des ersten Asses ist gegeben durch

$$E = \sum_{k=1}^{m-n+1} k \cdot p_k = \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{k=1}^{m-n+1} k \cdot \binom{m-k}{n-1} = \frac{1}{\binom{m}{n} \cdot (n-1)!} \sum_{k=1}^{m-n+1} k \cdot \prod_{i=0}^{n-2} (m-k-i) \,.$$

Wir beziehen in das Produkt den Faktor m-k+1 ein und versehen es mit negativem Vorzeichen. Nun müssen wir nur noch das (m+1)-fache des ursprünglichen Produkts addieren und erhalten die äquivalente Formel

$$E = \frac{1}{\binom{m}{n} \cdot (n-1)!} \left((m+1) \sum_{k=1}^{m-n+1} \prod_{i=0}^{n-2} (m-k-i) - \sum_{k=1}^{m-n+1} \prod_{i=-1}^{n-2} (m-k-i) \right).$$

Substitutionen der Indexvariablen liefern

$$E = \frac{1}{\binom{m}{n} \cdot (n-1)!} \left((m+1) \sum_{k=n-1}^{m-1} \prod_{i=0}^{n-2} (k-i) - \sum_{k=n}^{m} \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) \right).$$

Die weiteren Umformungen machen Gebrauch von der Formel

$$\sum_{i=M}^{N} \prod_{j=0}^{M-1} (i-j) = \binom{N+1}{M+1} \cdot M!\,,$$

die sich leicht mittels vollständiger Induktion beweisen lässt. Damit gelangen wir zu

$$E = \frac{1}{\binom{m}{n} \cdot (n-1)!} \left((m+1) \cdot \binom{m}{n} \cdot (n-1)! - \binom{m+1}{n+1} \cdot n! \right) = \frac{m+1}{(n-1)!} \left((n-1)! - \frac{n!}{n+1} \right)$$

und schlussendlich zu $E[K] = \dfrac{m+1}{n+1}$. In unserem Fall liefert die Formel den Wert 53/5.

23 Rentenpläne

Lösungsvorschlag 1(kommt mit minimalem Vorwissen aus): Aufgrund der schwankenden Aktienkurse müssen wir die Kosten je Anteilschein für jeden Monat separat benennen. Die Kosten eines Anteilscheins mögen im Monat i gleich a_i sein. Alle diese Werte sind positiv. Die Kosten je Anteilschein – gemittelt über n Monate – bezeichnen wir bei Plan A mit m_A und bei Plan B mit m_B. Ein wenig Rechnerei liefert die Erkenntnis, dass die Mittelwertbildung bei Plan A auf das harmonische Mittel und bei Plan B auf das arithmetische Mittel hinausläuft:

$$m_A = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \text{ bzw. } m_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}. \qquad (*)$$

Um einen ersten Einblick zu bekommen, nehmen wir uns den Fall n = 2 vor. Die Formeln vereinfachen sich zu $m_A = 2/(1/a_1 + 1/a_2)$ und $m_B = (a_1+a_2)/2$. Wir errechnen den Quotienten m_B/m_A

und erhalten aufgrund der Tatsache, dass $a_1^2 + a_2^2$ wenigstens 2 mal größer ist als $a_1 \cdot a_2$ ist[6], einen Wert von wenigstens 1. Also ist $m_A \leq m_B$ und wir können an der Stelle bereits vermuten, dass bei schwankendem Aktienkurs der Plan A günstiger ist als Plan B.

Was noch fehlt, ist die Verallgemeinerung auf beliebig großes n. Wir versuchen es mit vollständiger Induktion, also mit dem Schluss von n auf n+1 (oder von n-1 auf n). Den Induktionsanfang haben wir schon: Die Formel $1 \leq m_B/m_A$ gilt jedenfalls für $n = 1$ und $n = 2$. Wir setzen nun voraus, dass wir die Formel für n-1 schon bewiesen haben. Die Mittelwerte für diesen Fall bezeichnen wir jetzt mit m^-_A und m^-_B. Es gilt also als erwiesen, dass $1 \leq m^-_B/m^-_A$. Wir müssen nun zeigen, dass die Formel auch für die Mittelwerte m_A und m_B gilt, jeweils genommen über n Werte.

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} = \left(m^-{}_B \cdot \frac{n-1}{n} + a_n \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{m^-{}_A} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{n} \right)$$

Wegen $m^-_A \leq m^-_B$ folgt daraus die Ungleichung

$$\left(m^-{}_A \cdot \frac{n-1}{n} + a_n \cdot \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{m^-{}_A} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{n} \right) \leq \frac{m_B}{m_A}.$$

Mit a anstelle von m^-_A, b anstelle von a_n, p anstelle von $1/n$ und $1-p$ anstelle von $(n-1)/n$ hat die linke Seite der Ungleichung die Gestalt:

$$(a(1-p)+bp) \cdot \left(\frac{1-p}{a} + \frac{p}{b} \right).$$

Dieser Ausdruck ist wenigstens gleich eins. Damit haben wir das gewünschte Resultat $1 \leq m_B/m_A$. Anders ausgedrückt: $m_A \leq m_B$. Der Plan A ist im Allgemeinen günstiger als Plan B. Nur wenn die Aktienkurse nicht schwanken, gilt das Gleichheitszeichen.

Lösungsvorschlag 2 (braucht etwas tiefer liegende Kenntnisse über die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten von Mittelwerten): Für die mittleren Kosten haben wir die Formeln (*). Das harmonische Mittel der positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist niemals größer als ihr geometrisches Mittel. Und letzteres ist nach oben durch das arithmetischen Mittel dieser Zahlen beschränkt:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Also ist das harmonische Mittel nie größer als das arithmetische Mittel. Deswegen ist $m_A \leq m_B$. Bei Plan A fallen im Allgemeinen die geringeren Kosten je Anteilschein an.

Dass Plan A günstiger als Plan B ist, kann nicht verwundern: Der Nutznießer von Plan A deckt sich vorwiegend mit den billigeren Aktien ein; die teureren Aktien machen an seinem Aktienbesitz einen geringeren Anteil aus als es nach Plan B der Fall wäre.

---

[6] Die Zahlen a_1 und a_2 werden als positiv vorausgesetzt. Es gilt $0 < 2a_1a_2 \leq (a_1 - a_2)^2 + 2a_1a_2 = a_1^2 + a_2^2$ und damit auch $2 \leq (a_1^2 + a_2^2)/(a_1a_2)$.

24 Zufall oder nicht?

Wir gehen direkt das verallgemeinerte Problem an, da es auch nicht schwerer ist, als das konkrete: Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rein zufällige n-stelligen Bitfolge, in der die Null genauso wahrscheinlich auftritt wie die Eins, einen Abschnitt aus k aufeinander folgenden Nullen enthält.

Diese Wahrscheinlichkeit wird mit $p_{n,k}$ bezeichnet. Sie lässt sich mittels Rekursion über n bestimmen: Für $n<k$ ist $p_{n,k} = 0$. Außerdem gilt $p_{k,k} = 1/2^k$. Bis zu einem bestimmten n seien nun die $p_{n,k}$ bereits bekannt. Daraus erhalten wir $p_{n+1,k}$ aus folgender Überlegung: Die Wahrscheinlichkeit, dass bereits unter den ersten n Bits eine Folge aus k Nullen vorkommt, ist gleich $p_{n,k}$. Dazu kommt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur auf den letzten k Stellen, also auf den Positionen n-k+2, n-k+3, … n+1 die k Nullen in Folge erscheinen. Das sind Folgen, die auf den ersten n-k keine Nullfolgen der Länge k enthalten und auf der Position n-k+1 eine Eins und auf den restlichen Positionen Nullen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich $(1-p_{n-k,k})/2^{k+1}$. Daraus folgt die gesuchte Rekursionsformel für $k<n$:

$$p_{n+1,k} = p_{n,k} + (1-p_{n-k,k})/2^{k+1}.$$

In der folgenden Tabelle sind für ein paar ausgewählte Zahlenpaare (n,k) die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,k}$ dargestellt. Hervorgehoben ist der Wert der Lösung für die konkrete Aufgabenstellung. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer gewürfelten Bitfolge aus 200 Bits acht aufeinander folgende Nullen auftreten, beträgt 32 Prozent.

Wahrscheinlichkeiten	***k***							
n	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
10	0.508	0.245	0.109	0.047	0.020	0.008	0.003	0.001
20	0.787	0.478	0.250	0.122	0.058	0.027	0.013	0.006
50	0.983	0.827	0.552	0.315	0.165	0.084	0.041	0.020
100	1.000	0.973	0.810	0.546	0.318	0.170	0.088	0.044
200	1.000	0.999	0.966	0.801	0.544	**0.320**	0.173	0.090

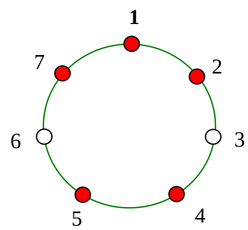
25 Licht an!

Wir starten mit einer *Spezialisierung* des Problems: Wir nehmen uns vor, dass eine bestimmte Lampe angeschaltet wird, beispielsweise die erste in der Runde, und dass der Zustand aller anderen anschließend unverändert ist. Ist die Lösung dieses Problems bekannt, lassen sich auf diese Weise nacheinander alle Lampen anschalten.

Lösung für den Spezialfall, dass nur eine Lampe umzuschalten ist. Durch vier Tastendrücke lassen sich genau zwei beliebig gewählte Lampen umschalten: Mit zwei Tastendrücken schaltet man sechs Lampen einmal um, und spart dabei genau die erste der beiden Lampen aus. Dann macht man dasselbe für die zweite Lampe und siehe: Diese beiden Lampen werden je genau einmal geschaltet. Alle anderen Lampen werden bei dieser Aktion zweimal geschaltet. Sie nehmen also den ursprünglichen Zustand wieder an.

Und damit sind wir schon bei der Lösung unseres Spezialproblems: Wir betätigen zunächst den Taster der Lampe, die wir anschalten wollen, beispielsweise die erste in der Runde. Diese Lampe ist nun tatsächlich an. Aber dafür sind die beiden benachbarten Lampen umgeschaltet. Das ist wieder rückgängig zu machen. Das gelingt mit vier Tastendrücken, wie wir eben gesehen haben. Wir brauchen also fünf Tastendrücke um genau eine Lampe umzuschalten.

Wir nummerieren die Lampen und die zugehörigen Taster rundum vorwärtsschreitend durch. Im Falle, dass wir nur die Lampe 1 umschalten wollen, betätigen wir die Taster 1, 2, 4, 5 und 7. Das sind der zur umzuschaltenden Lampe selbst gehörende Taster sowie die beiden benachbarten und die Taster der beiden entfernten (gegenüberliegenden) Lampen.



Eine Auswahl von umzuschaltenden Lampen oder die zu betätigenden Taster lassen sich durch Teilmengen der Zahlen von 1 bis 7 darstellen. Wollen wir die Lampe 1 umschalten und alle anderen im ursprünglichen Zustand belassen, dann ist die Auswahl der zu betätigenden Taster gegeben durch die Menge {1, 2, 4, 5, 7}. In der Grafik sind die zu betätigenden Schalter rot markiert. Für eine beliebige Lampe mit der Nummer x schreiben für die Tasterauswahl $T(x)$. Für $x = 1$ haben wir die Tasterauswahl eben gesehen. Weitere Beispiele: $T(3) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$, $T(7) = \{1, 3, 4, 6, 7\}$.

Wollen wir beispielsweise die Lampen 3 und 7 umschalten, dann müssen wir die Taster 1 und 2 betätigen. Alle anderen kommen in beiden Tasterauswahlmengen vor und müssten zweimal betätigt werden. Aber stattdessen kann man diese Taster auch ruhen lassen, denn das zweimalige Betätigen hat keine Auswirkungen auf den schließlich erreichten Zustand.

Diese Methode führt für jede Menge von umzuschaltenden Lampen zu einer Tasterauswahl, die sich als Teilmenge der Zahlen von 1 bis 7 darstellen lässt. Und diese Tasterauswahl ist – wie wir gleich sehen werden – eindeutig und damit minimal.

Eindeutigkeit der Lösung. Gäbe es zu einer Lampenauswahl von umzuschaltenden Lampen zwei verschiedene Tasterauswahlen, dann könnte man die Tasterauswahlen hintereinander anwenden und hätte wieder den ursprünglichen Zustand: Keine der Lampen wäre umgeschaltet worden. Durch die Streichung doppelter Schalterbetätigungen ergibt sich eine resultierende Tasterauswahl von jeweils nur einmal zu betätigenden Tastern. Wenn diese resultierende Tasterauswahl leer ist, unterscheiden sich die beiden Tasterauswahlen nicht. In diesem Fall ist die Lösung des Problems eindeutig. Und genau das muss jetzt noch gezeigt werden.

Jede Lampe kann von genau drei Tastern umgeschaltet werden. Damit kommt man je Lampe auf 0-, 1-, 2- oder 3-maliges Umschalten. Da die resultierende Tasterauswahl den Ausgangszustand wieder herstellt, kommen nur 0- oder 2-maliges Umschalten in Frage. Je Tastendruck werden 3 Lampen umgeschaltet. Werden alle Lampen zweimal umgeschaltet, ist die Zahl der Lampenumschaltungen gleich 14. Diese Zahl ist nicht durch drei teilbar. Folglich ist dieser Fall ausgeschlossen. Also muss es eine Lampe geben, die nicht umgeschaltet wird. Daraus folgt, dass der zugehörige Taster und die beiden daneben nicht betätigt werden. Und auf diese Weise fortfahrend folgt der Schluss, dass alle Schalter zu meiden sind. Die Schalterauswahl ist leer. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

Eine einfache Regel. Die Tasterauswahl $T(x)$ für eine beliebige umzuschaltende Lampe x können wir auch von der anderen Seite betrachten: Wir gehen von einem Schalter y aus und fragen, ob er zu betätigen ist oder nicht. Natürlich ist er genau dann zu betätigen, wenn er zur Auswahl $T(x)$ gehört: $y \in T(x)$. Wir bilden nun die Menge aller der Lampen x, für die der Schalter y betätigt werden muss, wenn jeweils nur diese eine Lampe umzuschalten ist. Diese Lampenauswahl nennen wir $L(y)$. Sie ist gegeben durch $L(y) = \{x \mid y \in T(x)\}$. Wir stellen fest, dass diese Menge gleich der Menge der Taster ist, die nötig wären, um genau die zugehörige Lampe y umzuschalten. Es ist also $L(y) = T(y)$.

Die Lampenauswahl eines Tasters besteht aus der dem Taster zugeordneten Lampe, den beiden benachbarten und den beiden gegenüberliegenden Lampen. Anders herum ausgedrückt: Außer der von dem Taster aus gesehen vorletzten und der übernächsten Lampe sind sämtliche Lampen in der Lampenauswahl enthalten.

Nun können wir auf den Fall übergehen, dass mehrere Lampen genau einmal umzuschalten sind. Wir gehen alle Taster durch und betrachten jeweils die zugehörige Lampenauswahl. Der Schalter wird genau dann betätigt, wenn in dieser Lampenauswahl eine ungerade Zahl von umzuschaltenden Lampen enthalten ist.