

Transformationsmethoden

Timm Grams, Fulda, 27.05.00

Der folgende Text ist ein Auszug aus meinem Skriptum: Simulation - strukturiert und objekt-orientiert programmiert, erschienen im BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992.

LTI-Systeme

Wir untersuchen Systeme mit einer Eingangsgröße x und einer Ausgangsgröße y . Die Vektoren der Ein- bzw. Ausgangsgrößen sind also eindimensional.

Wir beschäftigen uns hier insbesondere mit den so genannten linearen, zeitinvarianten, kausalen und stabilen Systemen (LTI-Systeme) und gehen zunächst vom kontinuierlichen Fall aus.

LTI-Systeme haben den großen Vorzug, dass sie sich mit mathematischen Methoden sehr effizient analysieren lassen. Das ist auch der Grund, weshalb sie hier im Rahmen der Simulation besonders hervorgehoben werden: Es gibt besonders leistungsfähige Algorithmen, die die Berechnungsexperimente mit solchen Modellen enorm beschleunigen können.

Zunächst sind die Begriffe linear, zeitinvariant, kausal und stabil zu erläutern.

Die Eingangsgröße kann als Ursache für die Ausgangsgröße aufgefasst werden. Wenn die Ursache x die Wirkung y hat, schreibt man auch:

$$x \rightarrow y$$

Lineare Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass der *Überlagerungssatz* (das Superpositionsprinzip) gilt: Aus der linearen Überlagerung von Ursachen folgt die entsprechende Überlagerung der Wirkungen. Anders ausgedrückt: Aus

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

und

$$v(t) \rightarrow w(t)$$

folgt mit zwei beliebigen reellen Zahlen a und b :

$$a x(t) + b v(t) \rightarrow a y(t) + b w(t)$$

Zeitinvariant heißt ein System, wenn eine zeitverschobene Ursache eine entsprechend zeitverschobene (ansonsten aber unveränderte) Wirkung erzeugt, wenn also aus

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

folgt

$$x(t - t_v) \rightarrow y(t - t_v).$$

Dabei ist t_v eine konstante Verzögerungszeit.

Die (von der Anschauung her eigentlich selbstverständliche) Forderung der *Kausalität* besagt nichts anderes, als dass die Wirkung nicht vor der Ursache da ist. Diese Eigenschaft aller physikalisch realisierbaren Systeme wird (beispielsweise in der Nachrichtentechnik) deshalb so betont, weil man zuweilen mit Systemmodellen arbeitet, die nicht kausal (also auch nicht realisierbar) sind und die dennoch einige Systemeigenschaften realisierbarer Systeme recht gut und sehr einfach nachbilden.

Eine weitere wichtige Systemeigenschaft ist die der *Stabilität*. Für unsere Zwecke reicht folgende Definition vollkommen aus: Stabile Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass sie auf Impulse mit Impulsen antworten. Dabei wird unter Impuls ein Vorgang mit beliebigem Zeitverlauf verstanden, dessen Augenblickswert nur innerhalb einer beschränkten Zeitspanne Werte aufweist, die von null merklich abweichen (DIN 5483).

Wenn sich die Normalform der Zustandsraumdarstellung mit den reellen Konstanten a_{mi} ($1 \leq m \leq q$, $1 \leq i \leq q$), b_m ($1 \leq m \leq q$), c_i ($1 \leq i \leq q$) und d folgendermaßen aufschreiben lässt, dann handelt es sich um ein LTI-System (mit eindimensionalem Ein- und Ausgang):

$$\begin{aligned} dz_m(t)/dt &= \sum_{1 \leq i \leq q} a_{mi} z_i(t) + b_m x(t), \text{ wobei } 1 \leq m \leq q \\ y(t) &= \sum_{1 \leq i \leq q} c_i z_i(t) + d x(t) \end{aligned}$$

Zusätzlich wird gefordert, dass sämtliche Funktionen (Signale) für negative Zeiten gleich null sind. Für stetige Zustandsvariablen hat man damit die Anfangsbedingungen

$$z_m(0) = 0 \text{ für } 1 \leq m \leq q$$

(Der Beweis von Linearität und Zeitinvarianz wird zur Übung empfohlen.)

Durch Diskretisierung von Ein- und Ausgangsgröße mit der konstanten Schrittweite T_A kommt man zu den Abtastsystemen. Das sind Systeme, deren Ein- und Ausgangsgrößen *Folgen* sind. Das Zeichen h ist in der numerischen Mathematik für die Schrittweite und in der Systemtheorie für die Impulsantwort eingeführt. Um Namenskollisionen zu vermeiden, wird für die Abtastschrittweite gelegentlich T_A geschrieben.

Die Abtastsysteme sind heute deshalb so interessant, weil sie mit dem Rechner oder mit relativ einfachen Digitalbausteinen zu realisieren sind.

Für die Eingangsfolge eines Abtastsystems schreiben wir

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_k)_k$$

Und die Ausgangsfolge ist

$$y = (y_0, y_1, y_2, \dots) = (y_k)_k$$

Hierbei steht k für die diskretisierte Zeit: $k = 0, 1, 2, \dots$

Vorausgesetzt wird, dass alle Zeitfunktionen für negative Zeiten gleich null sind. Treten also - beispielsweise in Rekursionsgleichungen - negative Indizes bei den Signalen auf, dann sind diese Signalwerte gleich null zu setzen.

Auch für Abtastsysteme lassen sich die Eigenschaften linear und zeitinvariant definieren. Nur die Eigenschaft der *Zeitinvarianz* sei für die Abtastsysteme noch einmal formuliert: Aus

$$(x_k)_k \rightarrow (y_k)_k$$

folgt

$$(x_{k-v})_k \rightarrow (y_{k-v})_k$$

Dabei ist v eine nichtnegative Zahl, die die Anzahl der Schritte angibt, um die das Signal verzögert ist. Alle Größen mit negativen Indizes werden gleich null gesetzt:

$$(x_{k-v})_k = (x_{-v}, x_{1-v}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots, 0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

Das heißt, die Verzögerung um ν Schritte führt zu einem Signal, das aus dem ursprünglichen entsteht, indem ν Nullen vorangesetzt werden.

LTI-Abtastsysteme sind lineare und zeitinvariante Abtastsysteme. Sie lassen sich vollständig durch eine einzige Folge charakterisieren. Das wird jetzt gezeigt.

Sei die Folge $h = (h_0, h_1, h_2, \dots) = (h_k)_k$ die Antwort des Systems auf den Impuls $(1, 0, 0, 0, \dots)$. Also:

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \rightarrow (h_0, h_1, h_2, \dots)$$

Sei nun $(x_k)_k$ eine beliebige Eingangsfolge. Diese Folge lässt sich als lineare Überlagerung von verschobenen Impulsfolgen schreiben:

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, 0, 0, 0, \dots) + (0, x_1, 0, 0, \dots) + (0, 0, x_2, 0, \dots) + \dots \\ &= x_0 (1, 0, 0, 0, \dots) + x_1 (0, 1, 0, 0, \dots) + x_2 (0, 0, 1, 0, \dots) + \dots \end{aligned}$$

Der Überlagerungssatz und die Zeitinvarianz liefern für die Antwort y dann diese Darstellungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned} y &= (y_k)_k = (y_0, y_1, y_2, \dots) \\ &= x_0 (h_0, h_1, h_2, \dots) + x_1 (0, h_0, h_1, h_2, \dots) + x_2 (0, 0, h_0, h_1, h_2, \dots) + \dots \\ &= (x_0 h_0, x_0 h_1 + x_1 h_0, x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0, \dots) \end{aligned}$$

Das Element y_k der Ausgangsfolge hat also die allgemeine Form

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{i+m=k} x_i h_m = \sum_{0 \leq m \leq k} x_{k-m} h_m = \sum_{0 \leq i \leq k} x_i h_{k-i} \\ &= x_0 h_k + x_1 h_{k-1} + x_2 h_{k-2} + \dots + x_k h_0 \end{aligned}$$

Diese Verknüpfung der Folgen x und h zu der neuen Folge y heißt *Faltung* (Convolution).

Und das ist das Besondere der LTI-Systeme: Sie werden durch ihre *Impulsantwort* h vollständig charakterisiert. Man erhält die Antwort auf eine beliebige Eingangsfunktion durch Faltung dieser Funktion mit der Impulsantwort. Die Impulsantwort heißt auch *Operator des Systems*.

Die Faltung kann man auch als Multiplikation von Folgen auffassen. Durch die komponentenweise Addition und die durch die Faltung erklärte Multiplikation bilden die Folgen einen sogenannten "kommutativen Ring mit Einselement": Abgesehen von der Division, die nicht einschränkungslos möglich ist, gelten die Gesetze wie bei der Zahlenrechnung, die Rechenregeln für *Körper* also.

Jetzt kann die obige Faltung mit dem Multiplikationssymbol auch so geschrieben werden: $y = h x$

Wir identifizieren die Elemente des Grundkörpers (die Zahlen) mit Folgen: $\alpha = (\alpha, 0, 0, \dots)$. Das Rechnen mit diesen Folgen entspricht genau dem Rechnen mit den Elementen des Grundkörpers.

$$\alpha \beta = (\alpha, 0, 0, \dots) (\beta, 0, 0, \dots) = (\alpha \beta, 0, 0, \dots)$$

Die Folgen sind demzufolge eine Verallgemeinerung der Zahlen: die Zahlen sind in die Menge der Folgen eingebettet. Das Rechnen mit Folgen geht bei den Zahlen in die übliche Zahlenrechnung über.

ACHTUNG: α ist, abgesehen vom Fall $\alpha = 0$, etwas anderes als die konstante Folge $(\alpha)_k = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$. Insbesondere gilt $1 \cdot 1 = 1$ und $(1)_k (1)_k = (k+1)_k$.

Die Null (auch: *Nullfolge*)

$$0 = (0, 0, \dots)$$

ist neutral bezüglich der Addition und die Eins (der *Einheitsimpuls*)

$$1 = (1, 0, 0, \dots)$$

ist neutral bezüglich der Multiplikation. Es ist also $x + 0 = x$ und $1 \cdot x = x$ für jede beliebige Folge x .

Von besonderem Interesse ist die Folge

$$D = (0, 1, 0, 0, \dots),$$

die auch Verschiebungsoperator heißt (D steht für Delay). Die Multiplikation einer Folge mit diesem Verschiebungsoperator resultiert in einer Verschiebung der Folge um einen Zeitschritt:

$$D x = D(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

Jede Folge gestattet mit den Potenzen des Verschiebungsoperators die Darstellung:

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) = \sum_k x_k D^k$$

D^k ist zu lesen als k -fache Faltung: $D D \dots D$. Es ist $D^1 = D$ und $D^0 = 1$. Die Multiplikation einer Folge mit D^k entspricht einer Verzögerung der Folge um k Zeitschritte.

Von grundlegender Bedeutung ist die Frage nach dem zu einem vorgegebenen System inversen System. Der Operator eines LTI-Systems ist durch die Impulsantwort gegeben. Gefragt ist also der Kehrwert der Impulsantwort (falls dieser überhaupt existiert). Unter der Bedingung, dass h_0 ungleich null ist, existiert der Kehrwert der Folge

$$h = (h_0, h_1, h_2, \dots) = (h_k)_k$$

Der Kehrwert wird mit h^{-1} bezeichnet. Man erhält diesen Kehrwert, indem man die Gleichung

$$h y = 1.$$

nach y auflöst. Wir wollen gleich die etwas allgemeinere Gleichung

$$h y = x$$

angehen. Das ist nämlich genau die Beziehung zwischen Eingangsgröße x und Ausgangsgröße y des gesuchten inversen Systems. Falls das Eingangssignal der Einheitsimpuls ist ($x = 1$), ergibt sich als Ausgangssignal die Impulsantwort des inversen Systems:

$$y = h^{-1}$$

Die Gleichung $h y = x$ lautet ausführlich

$$x_k = \sum_{0 \leq m \leq k} h_m y_{k-m} = h_0 y_k + \sum_{1 \leq m \leq k} h_m y_{k-m}$$

Wegen h_0 ungleich 0 kann man diese Gleichung nach y_k auflösen:

$$y_k = (x_k - \sum_{1 \leq m \leq k} h_m y_{k-m})/h_0$$

Das ist eine Rekursionsformel, die es gestattet, die Ausgangsfolge aus der Eingangsfolge sukzessive zu ermitteln. Für die Ausgangsfolge kann man natürlich auch

$$y = h^{-1} x = x/h$$

schreiben.

Folgen der Form $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, die also ab einem bestimmten Index gleich null sind, wollen wir *endliche Folgen* nennen. Es ist oft sinnvoll, unendliche Folgen durch Kehrwerte endlicher Folgen darzustellen (natürlich geht das nicht immer). Für den Einheitssprung $(1)_k$ hat man z.B. die Darstellung

$$(1)_k = (1, 1, 1, \dots) = 1/(1-D)$$

Zum Beweis braucht man nur die beiden Seiten der Gleichung $(1)_k (1-D) = 1$ durch $(1-D)$ zu dividieren.

Die bilineare Transformation

Wie sehen nun die Operatoren für die Integration und die Differentiation aus? Gesucht ist zunächst ein geeigneter Integrationsoperator für Abtastsysteme.

Seien $x(t)$ und $y(t)$ jetzt zwei kontinuierliche Signale, so dass y das bestimmte Integral der Zeitfunktion x von 0 bis t ist:

$$y(t) = \int_0^t x(u) du$$

Umgekehrt ist dann x die Ableitung von y : $x(t) = dy(t)/dt$.

Integration der Funktion über ein Abtastintervall $[t_{k-1}, t_k)$ liefert bei Anwendung der Trapezregel:

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y_k - y_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t) dt$$

$$\approx 1/2 (x(t_k) + x(t_{k-1})) T_A = (x_k + x_{k-1}) T_A/2.$$

Die Differenzgleichung

$$y_k - y_{k-1} = (T_A/2) (x_k + x_{k-1})$$

stellt die Beziehung zwischen der Eingangsfolge $x = (x_k)_k$ und der Ausgangsfolge $y = (y_k)_k$ des gesuchten (diskretisierten) *Integrationsoperators* her. Setzt man für alle Folgenglieder mit negativem Index voraus, dass sie gleich null sind ($x_k = 0$ und $y_k = 0$ für $k < 0$), kann die Ausgangsfolge rekursiv berechnet werden. Diese Differenzgleichung kann mit den obigen Festlegungen für das Rechnen mit Folgen auch so formuliert werden:

$$(1 - D) y = (T_A/2) (1 + D) x$$

Der *Integrationsoperator* L ist demzufolge gegeben durch

$$L = \frac{T_A}{2} \cdot \frac{1 + D}{1 - D}$$

Der *Differentiationsoperator* wird (entsprechend dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung) als Kehrwert des Integrationsoperators definiert. Für den Differentiationsoperator verwenden wir die allgemein übliche Bezeichnung p :

$$p = \frac{2}{T_A} \cdot \frac{1-D}{1+D}$$

Wir haben also zur Festlegung des Differentiationsoperators die Relation $p L = 1$ benutzt. Dass dann auch $L p = 1$ gilt, folgt aus den Rechenregeln für Folgen. Wendet man die Operatoren also nacheinander auf ein diskretes Signal an, entsteht wieder das ursprüngliche Signal: $p L x = L p x = 1 x = x$.

Beispiel: Wir wählen als Zeitfunktion den Einheitssprung $(1)_k = (1, 1, 1, \dots)$. Die Integration liefert

$$L (1, 1, 1, \dots) = T_A (1/2, 1 1/2, 2 1/2, \dots)$$

Das ist ein plausibles Ergebnis. Die Differentiation des Ergebnisses liefert die ursprüngliche Folge - wie erwartet:

$$p L (1, 1, 1, \dots) = p (1/2 T_A, 1 1/2 T_A, 2 1/2 T_A, \dots) = (1, 1, 1, \dots)$$

Nun ändern wir die Reihenfolge von Differentiation und Integration. Zunächst wird differenziert

$$p (1, 1, 1, \dots) = (2/T_A, -2/T_A, 2/T_A, -2/T_A, \dots)$$

Die Integration "bringt wieder Ordnung hinein":

$$L p (1, 1, 1, \dots) = L (2/T_A, -2/T_A, 2/T_A, -2/T_A, \dots) = (1, 1, 1, \dots)$$

Das Beispiel zeigt, dass bei der Differentiation von Funktionen, die eine Sprungstelle haben, Vorsicht angebracht ist. Die Funktion $(1)_k$ ist der Einheitssprung und hat bei $t=0$ eine Sprungstelle vom Wert 0 auf den Wert 1. Die Anwendung des Differentiationsoperators liefert eine Folge, die sich schlecht interpretieren lässt.

Sei x eine für $t=0$ stetig differenzierbare Funktion. Mit x' bezeichnen wir das Signal, das auf der positiven Zeitachse gleich der Ableitung von x ist. Auf der negativen Zeitachse ist es, wie alle hier betrachteten Signale, ebenfalls gleich null.

Wir bezeichnen die aus x und x' hervorgehenden diskreten Signale wiederum mit x und x' :

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$x' = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots)$$

Sei ferner $(x(0))_k = (x(0), x(0), x(0), \dots)$ die Sprungfunktion mit derselben Sprunghöhe im Nullpunkt wie das ursprüngliche Signal. Mit der im Rahmen der Diskretisierung erreichbaren Genauigkeit gilt

$$x = L x' + (x(0))_k$$

Diese Relation ist eine direkte Übertragung des aus der Differential- und Integralrechnung bekannten Zusammenhangs

$$x(t) = \int_0^t x'(u) du + x(0)$$

in den Bereich der Folgen. Anwendung des Differentiationsoperators auf beide Seiten der Gleichung $x = L x' + (x(0))_k$ und Berücksichtigung der Identität $p L = 1$ liefert die *Grundformel der Operatorenrechnung* (Berg, 1972):

$$p x = x' + p (x(0))_k$$

Der Differentiationsoperator erzeugt aus einem differenzierbaren Signal demnach die Ableitung dieses Signals plus ein Signal, das aus der Anwendung des Differentiationsoperators auf die Sprungfunktion der Sprunghöhe $x(0)$ entsteht.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also auch die Systemgleichungen der kontinuierlichen LTI-Systeme, lassen sich näherungsweise nach folgendem Verfahren lösen: Alle Zeitfunktionen werden durch die entsprechende Abtastfolge ersetzt. An die Stelle der Differentiation tritt die Multiplikation (Faltung) mit dem Differentiationsoperator. An die Stelle von Ableitungen höherer Ordnung treten die entsprechenden Potenzen des Differentiationsoperators.

Bei diesem Ersetzungprozess wird vorausgesetzt, dass alle abzuleitenden Größen im Zeitnullpunkt die Sprunghöhe null haben. In diesem Fall folgt aus der Grundformel der Operatorenrechnung $p x = x'$.

Diese Voraussetzung bedeutet insbesondere, dass die Anfangswerte der Zustandsvariablen auf null gesetzt werden. Es werden hier also nur Systeme betrachtet, die anfangs im "energielosen" Zustand sind.

Die so entstehende Gleichung löst man schließlich nach der unbekanntem Funktion auf.

Da bei der beschriebenen Transformation einer Differentialgleichung in eine Differenzgleichung die Differentiation durch den in D bilinearen Differentiationsoperator ersetzt wird, spricht man auch von *bilinearer Transformation*.

Mithilfe der bilinearen Transformation werden in der Nachrichtentechnik *Digitalfilter* entwickelt: Man unterzieht ein analoges Filter, das irgendwelche vorteilhaften Eigenschaften besitzt, der bilinearen Transformation und erhält dadurch ein Digitalfilter mit denselben Eigenschaften. Digitalfilter zieht man den Anlogschaltungen vor, weil sie einfacher zu realisieren und gegenüber Umgebungseinflüssen unempfindlicher sind.

Die bilineare Transformation ist auch für die Simulation interessant: Digitalfilter können als Modelle der Analogfilter dienen. Sie sind mit dem Rechner einfach zu realisieren.

Beispiel (RC-Integrierglied): Für die Eingangsspannung x und die Ausgangsspannung y gilt die folgende Differentialgleichung (Steinbuch, Rupprecht, Wendt, 1982, Band I):

$$RC \, dy(t)/dt + y(t) = x(t)$$

Der Anfangswert der Ausgangsspannung sei $y(0) = 0$.

Die bilineare Transformation liefert die Beziehung $RC p y + y = x$ zwischen den Folgen der Ein- und Ausgangsgröße (sie werden weiterhin mit x und y bezeichnet). Diese Relation wird nach y aufgelöst, was ja unter bestimmten Bedingungen bei Folgen möglich ist:

$$y = x/(1 + p RC)$$

Nun setzt man $p = 2/T_A(1-D)/(1+D)$ in diese Gleichung ein. Nach einigen Umformungen ergibt sich die *Ein-/Ausgangsbeziehung* in der Form

$$y = x (b_0 + b_1 D) / (1 + a_1 D)$$

Mit den Konstanten $b_0 = b_1 = 1/(1 + 2RC/T_A)$ sowie $a_1 = (1 - 2RC/T_A)/(1 + 2RC/T_A)$.

Aus der Theorie der Digitalfilter sind effiziente Realisierungsmöglichkeiten für Operatoren wie $(b_0 + b_1 D)/(1 + a_1 D)$ bekannt (z.B. Shapiro, 1978; Rader, Gold, 1967). Dennoch wollen wir das Blockschaltbild hier einmal "zu Fuß" entwickeln: Aus der Ein-/Ausgangsbeziehung ergibt sich nach Multiplikation beider Seiten mit $(1 + a_1 D)$ die Gleichung

$$y + a_1 D y = b_0 x + b_1 D x$$

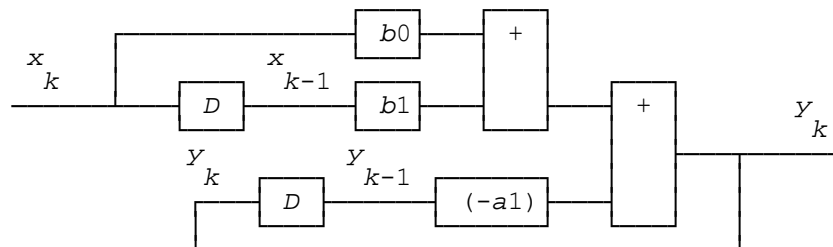
und in Komponentenschreibweise

$$y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1}$$

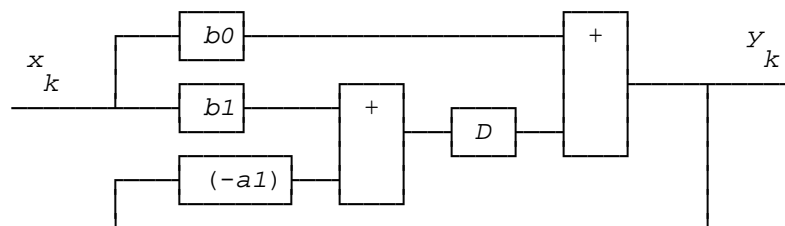
Durch Auflösen nach y_k erhält man eine *Rekursionsgleichung* für y :

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} - a_1 y_{k-1}$$

Das zugehörige Blockdiagramm:



Durch Äquivalenzumformungen kann man erreichen, dass nur noch ein Speicher im Blockdiagramm vorkommt: eine Vertauschung der Speicher mit den nachfolgenden Proportionalgliedern bringt die Speicher unmittelbar vor die Addierer. Durch die Anwendung des Assoziativgesetzes der Addition erreicht man, dass die Speicher genau vor einem Addierer liegen. Die Speicher kann man "über den Addierer schieben". Dadurch erhält man schließlich eine der speicherminimalen (kanonischen) Realisierungen des Filters:



Für die Simulation mit dem Digitalrechner kann man direkt von der Rekursionsgleichung ausgehen. Auch das Blockschaltbild eignet sich als Ausgangspunkt für eine Simulation. Dass man bei speicherminimalen Realisierungen die wenigsten Variablen zum Zwischenspeichern von Werten nötig hat, fällt bei der Simulation weniger ins Gewicht. Für die Hardware-Realisierung von Digitalfiltern spielt dieser Gesichtspunkt dagegen schon eine Rolle.

Im Aufgabenteil wird die Durchführung der Simulationen behandelt. Dort findet man auch die Sprung- und die Impulsantwort des RC-Integriergliedes.

Die bilineare Transformation ist zunächst eine symbolische Methode zur Herleitung der Rekursionsgleichungen oder zur Ermittlung eines Blockdiagramms. In digitaltechnischer Realisierung kann das Modell an die Stelle des kontinuierlichen Systems innerhalb einer grö-

ßeren Systemumgebung treten. Das heißt, wir haben die Möglichkeit der *Echtzeitsimulation* gewonnen - aber auch die, analoge Schaltungen tatsächlich durch digitale zu ersetzen, wie das beispielsweise in der heute üblichen PCM-Technik beim Telefon getan wird (Steinbuch, Rupprecht, Band 2, 1982).

Literaturhinweise

- Berg, L.: Operatorenrechnung I. Algebraische Methoden. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972
- Steinbuch, K.; Rupprecht, W; Wendt, S.: Nachrichtentechnik. 3 Bände. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982