Prof. Dr. Timm Grams
Hochschule Fulda
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
Marquardstraße 35
36039 Fulda

Tel (0661) 78157
(0661) 9640-550
Fax (0661) 9640-559
mailto:Timm.Grams@et.fh-fulda.de
http://www.hs-fulda.de/~grams

Samstag, 29. August 2009

Das Umtauschparadoxon für Fortgeschrittene[1]

Ein Angebot, das man nicht ablehnen kann

Zwei Briefumschläge enthalten Geld, einer doppelt so viel wie der andere. Ich darf einen Umschlag auswählen, und das Geld entnehmen. Danach darf ich entscheiden, ob ich das Geld behalten will oder zum anderen Kuvert wechsle. Mein Wohltäter informiert mich, dass er beim Füllen der Umschläge so vorgegangen ist: Anfangs hat er in den einen Umschlag 1 € gelegt und in den anderen 2 €. Dann hat er so lange gewürfelt, bis er die Augenzahl 1 oder 2 erhalten hat. Immer wenn das nicht der Fall war, also bei den Augenzahlen 3, 4, 5 oder 6, hat er die Beträge in den Umschlägen jeweils verdoppelt. Das Ergebnis dieser Prozedur – so sagt der Wohltäter – steckt in den Briefumschlägen.

Ich ziehe einen Umschlag und es sind 16 € drin. Ich überlege: Die Wahrscheinlichkeit des Falles, dass das der kleinere Betrag ist, steht zu der Wahrscheinlichkeit des anderen Falles im Verhältnis 2:3. Den kleineren Betrag habe ich also mit der (bedingten) Wahrscheinlichkeit 2/5 oder 40 % gezogen und den größeren mit der Wahrscheinlichkeit 3/5 oder 60 %. Wenn ich tausche, beträgt der Erwartungswert demnach 16 € multipliziert mit dem Faktor 2×40 % + ½×60 %, das sind 110 %. Der Umtausch lässt im Mittel 10 % mehr erwarten als ich in der Hand halte. Das entspricht einem mittleren Zugewinn um 1 € und 60 Cent. Das Risiko, mit 60-prozentiger Wahrscheinlichkeit 8 € zu verlieren, fällt nicht so sehr ins Gewicht. Ich finde: Der Tausch lohnt sich. Die Zugewinnerwartung von 10 % bei Tausch gilt für jeden gezogenen Wert über 1 €; bei einem Euro ist sie sogar gleich 100 %.

Widerspruch

Treffe ich die Entscheidung auf der Basis des zu erwartenden Zugewinns, werde ich stets tauschen, egal welchen Betrag ich zunächst gezogen habe. Um mich für den Tausch zu entscheiden, brauche ich also den Umschlag gar nicht zu öffnen. Durch die virtuelle Tauschentscheidung mache ich 10% Gewinn. Auch jetzt öffne ich nicht und wiederhole die Tauschentscheidung. Noch einmal 10% Zugewinn. Und so weiter. Das kann ja wohl nicht sein. Oder?

Eine erste Analyse

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Wohltäter die Summen jeweils verdoppelt, ist gleich 2/3. Wir verallgemeinern diesen Wert durch Einführung der Variablen p („Verdopplungswahrscheinlichkeit"). Die Wahrscheinlichkeit des Falles i mit 2^i bzw. 2^{i+1} Euro in den Umschlägen hat demnach die Wahrscheinlichkeit $p_i = (1\text{-}p)\cdot p^i$. Wenn der jeweils kleinere Betrag mit der-

---

[1] Das Paradoxon behandle ich auf meiner Denkfallen-Seite http://www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm. Einiges davon ist in den entsprechenden Artikel der deutschsprachigen Wikipedia eingeflossen: http://de.wikipedia.org/wiki/Umtauschparadoxon.

In der berühmten Sammlung mathematischer Rätsel „Aha! Gotcha" von Martin Gardner (1982) taucht das Umtauschparadoxon unter dem Titel „The Wallet Game" auf, allerdings in der entschärften Fassung. Die Kenntnis des schweren Umtauschparadoxons verdanke ich der englischsprachigen Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem.

selben Wahrscheinlichkeit wie der größere gewählt wird, ist der Erwartungswert E_0 der Auszahlung (mit oder ohne Umtausch) gleich

$$E_0 = 2^0 \cdot \frac{p_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \frac{p_i + p_{i-1}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \cdot \frac{p_i}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \cdot p_i = \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \cdot p_i = \frac{3 \cdot (1-p)}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (2p)^i$$

.

Die unendliche Summe konvergiert nur für $p < ½$; E_0 nimmt dann den Wert

$$E_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-p}{1-2p}$$

an.

Für größere Werte von p existiert dieser Erwartungswert nicht. Und daran scheitert der Nachweis, dass in unserem Beispiel mit $p = 2/3$ ein Umtausch allgemein günstiger ist als das Einbehalten des zuerst gewählten Betrags.

Weitere Fragen

Mich hat diese Antwort noch nicht so richtig beruhigt: Die Sache mit dem Mittelwert „über alles“ ist doch zu weit weg von der konkreten Entscheidung, ob man tauschen soll oder nicht. Die Überlegungen, die den Tausch nahe legen, sind ziemlich zwingend. Ich wiederhole sie in etwas verallgemeinerter Form.

Ich setze für die Verdopplungswahrscheinlichkeit wieder die Variable p anstelle des konkreten Wertes 2/3. Wir gehen jetzt davon aus, dass der zuerst gewählte Betrag gleich 2^i ist (immer in €). Das kann der kleinere Betrag des Falles i oder aber der größere Betrag des Falles i-1 sein (0<i vorausgesetzt). Die Wahrscheinlichkeiten für die Ziehung des Betrages 2^i betragen jeweils die Hälfte der Fallwahrscheinlichkeiten $p_i = (1-p)\cdot p^i$ bzw. $p_{i-1} = (1-p)\cdot p^{i-1}$.

Unter der gemachten Bedingung ist die Wahrscheinlichkeit des Falles i gleich

$$P(\text{Fall } i \mid \text{Auszahlung gleich } 2^i) = \frac{p_i/2}{p_i/2 + p_{i-1}/2} = \frac{p_i}{p_i + p_{i-1}} = \frac{p}{p+1}$$

und dementsprechend ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Falles i-1 gleich

$$P(\text{Fall } i\text{-}1 \mid \text{Auszahlung gleich } 2^i) = \frac{p_{i-1}}{p_i + p_{i-1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Die erwartete Auszahlung bei Tausch ist damit gleich $2^{i+1} \cdot \frac{p}{p+1} + 2^{i-1} \cdot \frac{1}{p+1} = 2^{i-1} \cdot \frac{4p+1}{p+1}$.

Bezogen auf den ursprünglichen Betrag erhöht sich die Auszahlung bei Tausch um den Faktor $(2p+1/2)/(p+1)$. Die Mehrauszahlung bezogen auf den ursprünglichen Betrag ist gleich $(p-1/2)/(p+1)$. Das ergibt für $p = 2/3$ eine Zugewinnerwartung von 10%.

Die Zugewinnerwartung ist positiv für $1/2 < p$, dann lohnt ein Tausch, und negativ für $p<1/2$, dann ist ein Tausch nicht angeraten. Nur für $p = 1/2$ ist es egal, ob man tauscht oder nicht. Das gilt für alle Fälle i größer 0. Für $i = 0$, also wenn man einen Euro gezogen hat, spricht eine (sichere) Zugewinnerwartung von 100% für den Tausch.

Für $p = 2/3$ verstrickt man sich tief im oben geschilderten Widerspruch.

Fortsetzung der Analyse

In dieser Analyse setze ich nicht auf den Erwartungswert „über alles“. Ich mache eine ganz nahe liegende Annahme, nämlich die, dass die Mittel des Wohltäters, der die Briefumschläge füllt, nicht unbegrenzt sind.

Er kann sein Würfelspiel nicht beliebig lange fortsetzen. Seine Mittel mögen gerade bis zum Fall *m* reichen. Dann füllt er im höchsten Fall die Umschläge mit 2^m bzw. 2^{m+1} Euro. Er sorgt dafür, dass das Wahrscheinlichkeitsverhältnis aufeinander folgender Fälle gleich *p* ist[2].

Da die Anzahl der Fälle endlich ist, müssen die Wahrscheinlichkeiten neu normiert werden:

$$p_i = \frac{1-p}{1-p^{m+1}} \cdot p^i .$$

Die Formel für die Gewinnerwartung ohne Tausch E_0 geht dann über in

$$E_0 = 2^0 \cdot \frac{p_0}{2} + \sum_{i=1}^{m} 2^i \cdot \frac{p_i + p_{i-1}}{2} + 2^{m+1} \cdot \frac{p_m}{2} = \sum_{i=0}^{m} 2^i \cdot \frac{p_i}{2} + \sum_{i=0}^{m} 2^{i+1} \cdot \frac{p_i}{2} .$$

Die erste Summe erfasst die Gewinnerwartung derjenigen Fälle, in denen der niedrigere Betrag gezogen worden ist, und die zweite Summe beinhaltet alle die Fälle, in denen es der höhere Betrag war. Die Formel für die Gewinnerwartung lässt sich noch vereinfachen:

$$E_0 = \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{m} 2^i \cdot p_i = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-p}{1-p^{m+1}} \cdot \sum_{i=0}^{m} (2p)^i = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-p}{1-p^{m+1}} \cdot \frac{1-(2p)^{m+1}}{1-2p} .$$

Dieselbe Formel ergibt sich, wenn konsequent getauscht wird. Also: Der Tausch bringt tatsächlich nichts, wenn die Mittel des Wohltäters beschränkt sind.

Anders sieht die Sache aus, wenn man über die finanzielle Grenze und den zunächst gezogenen Betrag informiert ist.

Für $p<1/2$ sollte man nur tauschen, wenn man im Umschlag 1 € gefunden hat, sonst bleibt man bei seiner Wahl. Dadurch erhöht sich der Erwartungswert auf

$$E_0 + p_0 / 2 = E_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-p}{1-p^{m+1}} .$$

Für $1/2<p$ sollte man immer tauschen, wenn der gezogene Betrag kleiner als 2^{m+1} ist. Andernfalls behält man die Summe. Dadurch erhöht sich die Gewinnerwartung auf

$$E_0 + \frac{p_m}{2} \cdot 2^m = E_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-p}{1-p^{m+1}} \cdot (2p)^m .$$

Die nebenstsehende Tabelle zeigt einige der aus den Formeln gewonnenen Daten für den Fall p=2/3. Der Zugewinn wird durch den Mitspieler erzielt, der die Kenntnis über *p* und *m* optimal nutzt.

m	E_0	Absoluter Zugewinn	Relativer Zugewinn
0	1.5	0.5	33.33%
5	7.6	0.8	10.14%
10	34.4	3.0	8.70%
15	148.4	12.5	8.42%
20	629.3	52.6	8.35%
25	2656.2	221.5	8.34%
30	11197.9	933.3	8.33%

[2] Der Wohltäter kann bei der Auswahl des zu realisierenden Falles bei seiner Würfelmethode bleiben: Er beginnt nach dem Fall *m* einfach von vorn, beim Fall 0. Aber Vorsicht: Das Problem der begrenzten Ressourcen taucht hier ebenfalls auf, denn der Wohltäter hat ja für das Würfeln nicht beliebig viel Zeit.

Denkfalle „Unendlich“

Die Unendlichkeit ist fest in unserem Denken verankert: Jede Zahl, mag sie noch so groß sein, lässt sich verdoppeln, und diese Zahl wieder, und so weiter.

Dem unbefangenen Umgang mit dem Unendlichen verdanken wir die Infinitesimalrechnung. War den „alten Griechen“ das Paradoxon um den Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte ein Rätsel, so kann uns so etwas nicht mehr beunruhigen – dank der Infinitesimalrechnung[3].

Das Konzept des Unendlichen ist außerordentlich erfolgreich. Auf ihm beruhen Gleichgewichtsanalysen, alle Berechnungen „auf lange Sicht“, und das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Manche unhandliche Herleitung reduziert sich durch Einbeziehung des Unendlichen auf eine einfache Formel.

Aber auch im Alltagsdenken ist das Konzept des Unendlichen allgegenwärtig: Wir glauben gern, dass sich das Wirtschaftswachstum beliebig lang fortsetzen lässt. Wir leben, als seien die Ressourcen unbegrenzt.

Manchmal wird uns die Endlichkeit bewusst: wenn eine Börsenblase platzt, wenn eine Wirtschaftskrise droht, oder wenn der Benzinpreis vorübergehend in die Höhe schnellt.

Wir haben es mit einer Denkfalle zu tun: Das Konzept des Unendlichen ist bewährt, aber manchmal eben auch verkehrt. Beim Umkehrparadoxon schlägt diese Denkfalle besonders heimtückisch zu.

Von vergleichbarer Hinterhältigkeit wirkt diese Denkfalle beim St. Petersburger Spiel[4]: Als möglicher Gewinn werden zunächst zwei Euro auf den Tisch gelegt. Dann wird eine Münze geworfen. Erscheint das Wappen, wird der mögliche Gewinn verdoppelt. Das passiert so lange, bis die Zahl oben liegt. Dann wird der Gewinn ausgezahlt.

Bis zu welchem Einsatz lohnt sich die Teilnahme an diesem Spiel?

Nun: Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei zwei Euro Gewinn bleibt, ist gleich ½. Vier Euro sind es mit der Wahrscheinlichkeit ¼. Und so weiter. Die Gewinnerwartung beträgt also $2\times1/2 + 4\times1/4 + 8\times1/8 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$.

Das heißt, dass sich jeder beliebig hohe Einsatz rechtfertigen lässt. Tatsächlich wird man nur wenige Personen finden, die mehr als 10 € Einsatz riskieren. Darin liegt der Widerspruch des St. Petersburger Paradoxons.

Tatsächlich ließen sich hohe Einsätze nur dann rechtfertigen, wenn das Spiel beliebig oft wiederholt würde und es möglich wäre, zunächst einmal unbegrenzt viel Geld zu verlieren.

---

[3] Das ist eine von Zenons Paradoxien. Achilles rennt mit einer Schildkröte um die Wette. Der Gerechtigkeit halber bekommt die Schildkröte einen Vorsprung von – sagen wir einmal – einhundert Metern. Los geht’s. In Kürze hat Achilles die 100 m überwunden. Die Schildkröte ist schon weg. Achilles muss nun bis zu dem Punkt, den die Schildkröte inzwischen erreicht hat. Sobald Achilles auch an dieser Stelle ist, hat die Schildkröte sich schon wieder etwas weiter bewegt. Das geht immer so weiter, unendlich oft. Kann Achilles die Schildkröte überhaupt erreichen?

[4] Das St. Petersburger Spiel wird in vielen Paradoxa-Sammlungen behandelt, beispielsweise in den „Paradoxa“ von Gábor J. Székely (1990, S. 34 ff.). Auch im Buch „Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre“ von Bamberg und Coenenberg (1989, S. 73) spielt es eine zentrale Rolle.