Prof. Dr. Timm Grams
Fachhochschule Fulda
Fachbereich Elektrotechnik

Mittwoch, 3. September 2003
(Erstfassung: 17.5.1993)
Datei: Renewal.doc

Anmerkungen zur Erneuerungstheorie

Stationäre Verteilungen von Alter (Alterspyramide) und Restlebensdauer

Wir betrachten ein Objekt, das nach einer durch Zufall bestimmten Zeit verschwindet. Unmittelbar nach seinem Ende wird dieses Objekt durch ein gleichartiges neues ersetzt. Die Ereignisse der Erneuerung werden auf der Zeitachse markiert. Die Lebensdauern der Objekte - also die Intervalle zwischen den Ereignissen - mögen Realisierungen einer Zufallsvariablen X sein. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Zufallsvariable X diskret ist.

Bezeichnungen:

X Zufallsvariable der Lebensdauer eines Objekts. Zeit zwischen Ereignissen. Intervalllänge.

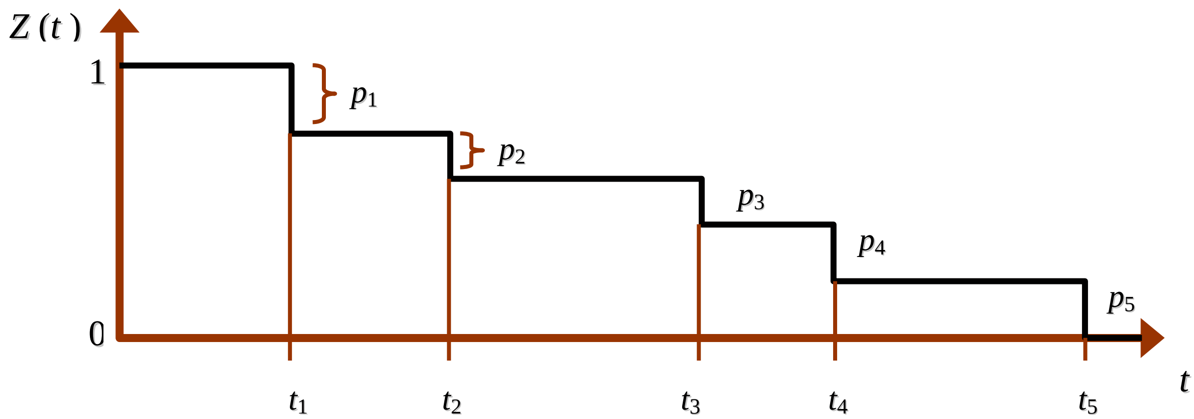
p_i Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt die Lebensdauer t_i hat:

$$p(X = t_i) = p_i$$

Die *Überlebenswahrscheinlichkeit* $Z(t)$ ist definiert durch

$$Z(t) = p(X \geq t) = \sum_{i|t_i \geq t} p_i = 1 - p(X < t) = 1 - F(t)$$

Hierin ist $F(t)$ die *Lebensdauerverteilung* $F(t) = \sum_{i|t_i < t} p_i$.



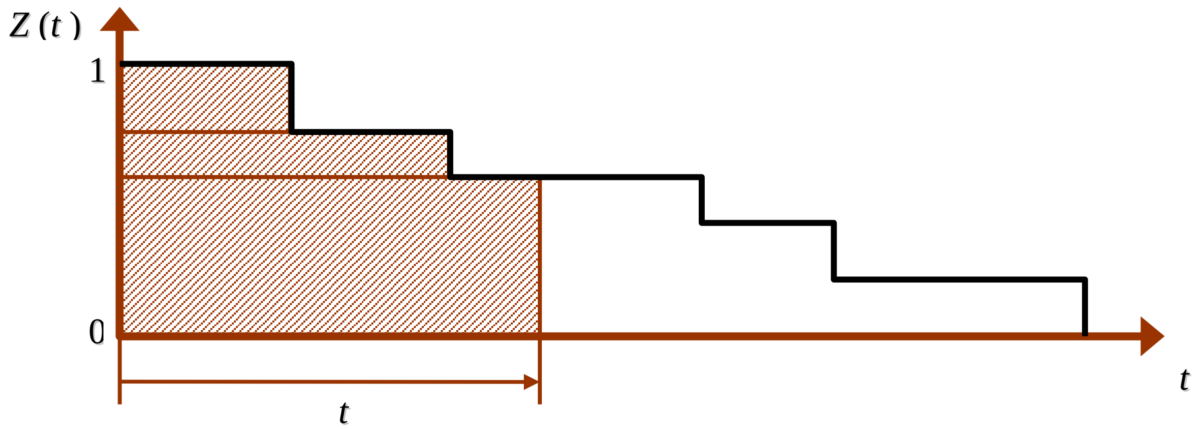
Es gilt

$$\int_0^t Z(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i|t_i<t} p_i \cdot t_i + \sum_{i|t\leq t_i} p_i \cdot t$$

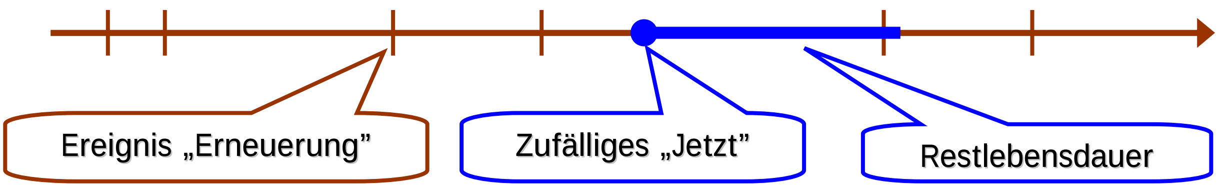
und die *mittlere Lebensdauer* τ der Objekte ist gegeben durch

$$\tau = \int_0^\infty Z(t)\,\mathrm{d}t = \sum_i p_i t_i \ ,$$

wie man sich anhand der folgenden Grafik klar machen kann.



Aus dem schon lange andauernden *Erneuerungsprozess* wird nun ein Zeitpunkt rein zufällig ausgewählt. Das ist das zufällige „Jetzt“. Das Alter des gerade angetroffenen Objekts ist eine Zufallsvariable, sie erhält das Symbol T_A. Die Restlebensdauer wird mit T_R bezeichnet.



Nun geht es darum, die Verteilungsfunktionen $F_A(t)$ bzw. $F_R(t)$ dieser Zufallsvariablen zu ermitteln.

Mit q_i bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, mit dem zufälligen „Jetzt“ auf ein Objekt der Lebensdauer t_i zu treffen. Für die Berechnung dieser Größe stellen wir uns einen großen Zeitraum vor, in dem schon viele Erneuerungen stattgefunden haben. Sei n_j die Anzahl aller Intervalle der Länge t_j und n die Gesamtzahl der Intervalle. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig auf ein Objekt der Lebensdauer t_i zu treffen, ist gleich dem relativen Anteil dieser Intervalle am gesamten betrachteten Zeitraum.

Das gesuchte Verhältnis q_i ist gleich $n_i t_i/(\Sigma_j\, n_j t_j)$. Teilt man Zähler und Nenner durch n und nutzt man aus, dass für große n wenigstens näherungsweise $p_j = n_j/n$ ist, so erhält man für das gesuchte Verhältnis den Wert $p_i t_i/\tau$. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig auf ein Intervall der Länge t_i zu stoßen, ist demnach gleich

$$q_i = p_i t_i/\tau.$$

Wegen der Zufälligkeit des Zeitpunkts, zu dem das Objekt angetroffen wird, kann das Alter des angetroffenen Objekts als gleich verteilt angenommen werden: Die Wahrscheinlichkeit, dass das angetroffene Objekt mit der Lebensdauer t_i ein Alter kleiner t hat, ist gleich t/t_i. (Das gilt unter der Voraussetzung, dass $t \le t_i$; andernfalls ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 1. Im folgenden wird die Bedingung $t \le t_i$ unausgesprochen vorausgesetzt.) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Objekt eine Restlebensdauer kleiner als t hat, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass das Alter größer oder gleich t_i-t ist. Und diese Wahrscheinlichkeit ist das Komplement zu eins der Wahrscheinlichkeit, dass das Alter kleiner als t_i-t ist. Und die Letztere ist gleich $(t_i-t)/\, t_i$. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit für eine Restlebensdauer kleiner t gleich $1-(t_i-t)/\, t_i$. Und dieser Wert ist wiederum gleich t/t_i. Man erhält also dasselbe Ergebnis wie für das Alter.

Der Wert t/t_i ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Alter des Objekts (oder seine Restlebensdauer) kleiner als t ist, unter der Bedingung, dass die Lebensdauer des Objekts gleich t_i ist. (Gilt, wie gesagt, für $t \leq t_i$. Ansonsten ist diese bedingte Wahrscheinlichkeit gleich 1.)

Bereits jetzt ist zu erkennen, dass das Alter und die Restlebensdauer dieselbe Verteilung besitzen.

Die *Verteilungsfunktion des Alters* lässt sich nun angeben, indem man alle diese bedingten Wahrscheinlichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Lebensdauer multipliziert und alle diese Produkte über alle möglichen Lebensdauern summiert:

$$p(T_A < t) = \sum_{i|t_i<t} q_i \cdot 1 + \sum_{i|t\leq t_i} q_i \cdot t/t_i = (\sum_{i|t_i<t} p_i \cdot t_i + \sum_{i|t\leq t_i} p_i \cdot t)/\tau$$

Der geklammerte Ausdruck ist gleich $\int_0^t Z(t)\,\mathrm{d}t$. Daraus folgt

$$F_A(t) = p(T_A < t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t Z(t)\,\mathrm{d}t$$

Dementsprechend ist die *Verteilungsfunktion der Restlebensdauer* gleich

$$F_R(t) = p(T_R < t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t Z(t)\,\mathrm{d}t$$

Die zugehörigen Verteilungsdichten sind $f_A(t) = f_R(t) = Z(t)/\tau$.

Das sind grundlegende Formeln der *Erneuerungstheorie* (Bratley/Fox/Schrage, 1987, S. 113 ff; Kleinrock, 1975, Band I, S. 169 ff.).

Beispiel: Mietwagenunternehmen

Ein Mietwagenunternehmen unterhält einen Park von komfortablen Wohnmobilen. Kein Fahrzeug bleibt länger als 2 Jahre im Einsatz. Der größere Teil ist sogar schon früher nicht mehr wirtschaftlich verwendbar, so dass laufend Ersetzungen erforderlich werden. Mehrjährige Beobachtungen ergaben die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die wirtschaftliche Lebensdauer der Wohnmobile (Tabelle1 und Bild). Gesucht ist die Verteilung der Lebensdauern (Alterspyramide), die sich im Laufe der Zeit einstellt. Die Erneuerung findet immer am Anfang eines Zweimonatsintervalls statt. Zu dem Zeitpunkt wird die Statistik geführt, und zwar unmittelbar vor der Erneuerung.

Lösung: Die mittlere Lebensdauer beträgt 17 Monate. Die Alterspyramide (Verteilung des Alters) ist in Tabelle 2 und im Bild zu sehen. Literaturhinweise: Sasieni, Yaspan, Friedman (1965, S. 118 ff.).

Tabelle 1 Lebensdauerverteilung der Wohnmobile

Anzahl Monate Zeit bis zum Ersatz	Wahr-scheinlichkeit
10	5 %
12	10 %
14	15 %
16	20 %
18	20 %
20	15 %
22	10 %
24	5 %

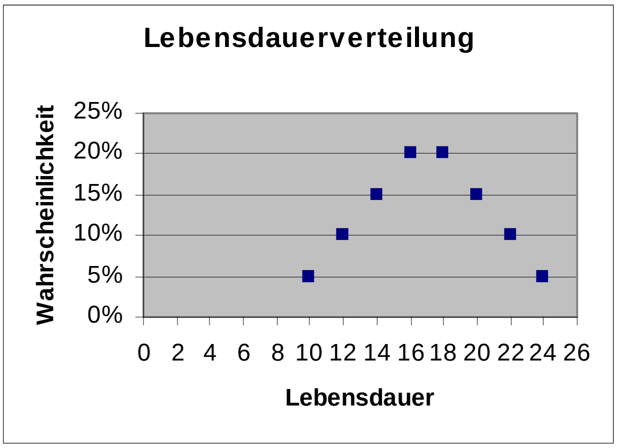
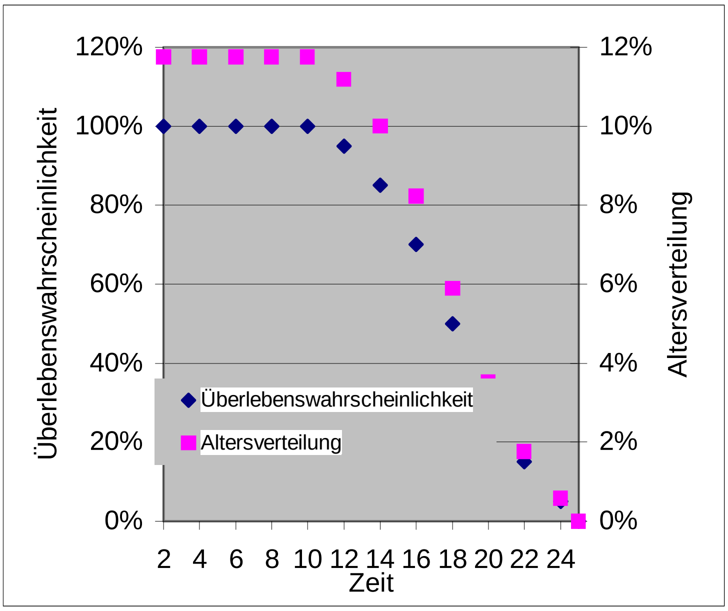


Tabelle 2 Altersverteilung der Wohnmobile

Lebensalter (Monate)	Wahr-scheinlich-keit
2	11.76 %
4	11.76 %
6	11.76 %
8	11.76 %
10	11.76 %
12	11.18 %
14	10.00 %
16	8.24 %
18	5.88 %
20	3.53 %
22	1.76 %
24	0.59 %



Simulation nichthomogener Poisson-Prozesse: Die Rücksetzmethode

Zu simulieren sei ein Poisson-Prozess. Unter einem Poisson-Prozess verstehen wir einen Erneuerungsprozess, dessen Intervalllängen (Lebensdauern) exponentialverteilt sind (Kleinrock, Band I, 1975, S. 24 ff. und S. 60 ff.):

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

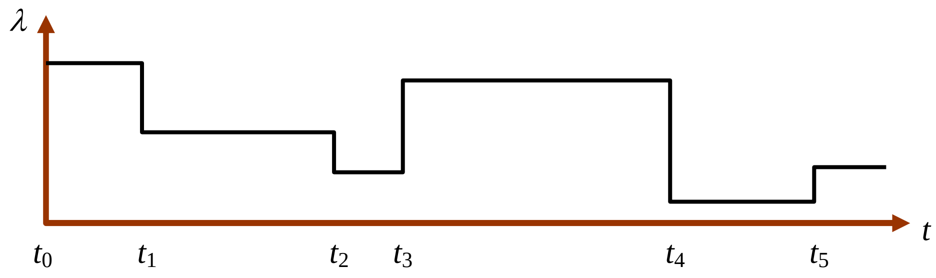
Dabei ist die Erneuerungsrate λ gleich dem Kehrwert der mittleren Lebensdauer:

$$\lambda = 1/\tau$$

Die Erneuerungsrate ist der Parameter des Poisson-Stroms. Er kann auch als Intensität des Ereignisstroms aufgefasst werden, da er die Anzahl der je Zeiteinheit zu erwartenden Ereignisse angibt.

Zur Simulation ermittelt man über die „Methode der Umkehrfunktion“ die Folge der Lebensdauern und damit die Folge der Erneuerungszeitpunkte.

Komplizierter wird's, wenn der Parameter des Poisson-Prozesses nicht mehr konstant, sondern zeitabhängig ist: $\lambda = \lambda(t)$. Wir sprechen dann von einem inhomogenen Poisson-Prozess. Vorausgesetzt sei nun, dass $\lambda(t)$ eine Treppenfunktion ist.



Für die Zeit bis zur ersten Änderung ist $\lambda(t) = \lambda_1$, von da bis zur zweiten Änderung setzen wir $\lambda(t) = \lambda_2$. Also: $\lambda(t) = \lambda_i$ für $t_{i-1} \leq t < t_i$.

Die Aufgabe besteht nun darin, einen Poisson-Strom mit sich sprunghaft ändernden Erneuerungsraten zu simulieren. Das kann man nach den Methoden aus dem Buch von Bratley, Fox und Schrage (1987, S. 178 ff.) tun. Aber es geht einfacher. Nämlich nach einem *Rücksetzverfahren*:

Angefangen beim Zeitnullpunkt zieht man sukzessive Lebensdauern entsprechend der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ_1. Die akkumulierten Lebensdauern liefern die entsprechenden Erneuerungszeitpunkte (Ereigniszeitpunkte). Das macht man solange, bis ein Ereignis die Zeitgrenze t_1 überschreitet. Dieses letzte Ereignis streicht man aus der Folge der Ereignisse wieder heraus und zieht die nächste Lebensdauer zum Parameter λ_2. Diese wird bei t_1 angesetzt (zu t_1 addiert) und so erhält man den nächsten Ereigniszeitpunkt, der anstelle des gestrichenen steht, usw.

Eine einfache Begründung für dieses Vorgehen liefert das diskrete Modell: Die Zeitachse wird in kleine Zeitschritte der Dauer Δt aufgeteilt. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in einem solchen Intervall ist gleich $\Delta t \lambda_i$, wobei λ_i der in diesem Intervall gerade gültige Parameter ist. Man „erwürfelt" nun für jeden dieser Abschnitte, ob das Ereignis eintritt oder nicht. Das „Rücksetzverfahren" entspricht nun dem Vorgehen, dass man zunächst für die Intervalle nach der Wahrscheinlichkeit $\Delta t \lambda_1$ würfelt, ob ein Ereignis im Intervall stattfindet oder nicht. Man hört erst auf, wenn das erste Ereignis nach Überschreiten der Zeitgrenze aufgetreten ist. Dann geht man zurück bis zur Zeitgrenze und fängt dort wieder mit dem Würfeln an; jetzt aber gemäß der Wahrscheinlichkeit $\Delta t \lambda_2$ für das Eintreten des Ereignisses.

Das ist aber - statistisch gesehen - offensichtlich dasselbe, als hätte man direkt an der Zeitgrenze die neue Statistik zu Grunde gelegt und nicht erst nach der alten Statistik weitergewürfelt. Letzteres ist aber genau das den sich ändernden Erneuerungsraten angemessene Vorgehen. Das heißt: Das Rücksetzverfahren ist korrekt.

Das „Paradoxon der Restlebensdauer"

In der Rücksetzmethode zur Simulation inhomogener Poisson-Prozesse scheint ein Widerspruch zu stecken. Angenommen es ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dann bedeutet das erneute Ansetzen an der Zeitgrenze t_1, dass die Zwischenankunftszeit der beiden Ereignisse, zwischen denen die Zeitgrenze liegt, systematisch vergrößert wird. Hätte man einen „durchgehenden" Poisson-Prozess, wäre dem „offensichtlich" nicht so.

Die zuletzt geäußerte Vermutung ist falsch. Tatsächlich entspricht die Situation dem so genannten „Paradoxon der Restlebensdauer“ (Kleinrock, Band I, 1975, S. 169 ff.). Dieses Paradoxon löst sich auf, wenn man bedenkt, dass bei zufälliger Wahl eines Zeitpunkts auf der Zeitachse, dieser Zeitpunkt wohl bevorzugt in eines der längeren Intervalle fallen wird.

Diese Tatsache lässt sich mit den obigen Betrachtungen zur Alterspyramide präzisieren: Die Verteilungsdichte der ausgewählten Intervalle ist gleich $\lambda^2 te^{-\lambda t} = te^{-t/\tau}/\tau^2$. Der Erwartungswert der Länge der ausgewählten Intervalle ergibt sich daraus zu 2τ. Tatsächlich ist also - entgegen der zum Paradoxon führenden Vermutung - der Erwartungswert derjenigen Intervalle, in die eine Zeitgrenze fällt, doppelt so groß wie der Erwartungswert eines beliebigen Intervalls.

Die Verteilungsdichte der Restlebensdauer ergibt sich zu

$$f_R(t) = (1-F(t))/\tau = (1-(1-e^{-t/\tau}))/\tau = e^{-t/\tau}/\tau = f(t).$$

Das entspricht genau den Annahmen der Rücksetzmethode: Die Restlebensdauer ab der Zeitgrenzen besitzt dieselbe Verteilung wie die Lebensdauern insgesamt.

Literatur

Bratley, P; Fox, B. L.; Schrage, L. E.: A Guide to Simulation. Springer, New York 1987

Kleinrock, L.: Queuing Systems. Vol. 1: Theory. Wiley-Interscience 1975

Sasieni, M.; Yaspan, A.; Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Physica-Verlag Würzburg, Wien 1965