Querbeet
Eine Problemsammlung

Aus der Lektion Schöpferisches Denken – Heuristik[1]

Timm Grams, Fulda, 3. Juli 2004 (rev.: 13.05.11), http://www.fh-fulda.de/~grams

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Wir stehen vor einem Problem und sehen die Lösung nicht. Dabei kennen wir eigentlich alles, was wir zur Lösung brauchen. Nur: Wir kommen nicht darauf.

Die Problemlösefähigkeit wird in der Schule nicht ausreichend trainiert. Das zeigen uns die internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA.

In der Schule stehen Aufgaben im Allgemeinen in unmittelbarer Nachbarschaft zu den dafür nötigen Lösungsverfahren. Das erspart dem Schüler die geistigen Anstrengungen für die Erstellung eines Planes. Kurz gesagt: Der Schüler bekommt einen Hammer in die Hand und eine Kollektion von Nägeln. Wehe, es ist eine Schraube darunter. Dann wird die Aufgabe zu einem kaum mehr lösbaren Problem.

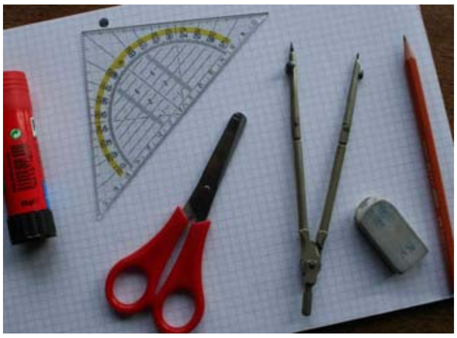
---

[1] Dort findet man auch Lösungsvorschläge. Versuchen Sie, auf das Nachgucken zu verzichten.

Die Problemsammlung soll helfen, das „Schubladendenken“ und die Neigung zur kritiklosen Regelanwendung zu überwinden. Die Probleme der vorliegenden Sammlung lassen sich allesamt mit Schulkenntnissen der Sekundarstufe I lösen. Um welches Wissen es sich handelt, das wird nicht verraten. Der Problemlöser muss den Plan und den Weg zur Lösung selber finden[2].

Die Utensilien

Der Taschenrechner und der Computer werden heute in der Schule wie selbstverständlich benutzt, gerade im Fach Mathematik.



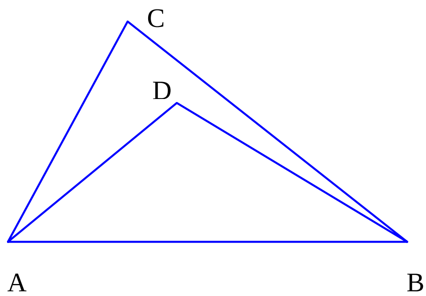
Dabei sind diese Werkzeuge nur von sehr begrenztem Nutzen, wenn es gilt, mathematische Zusammenhänge zu entdecken. Manchmal verdecken sie mehr als sie enthüllen. Jedenfalls ist ihr Gebrauch nur demjenigen anzuraten, der schon viel Mathematik bereits *begriffen* hat. Und dafür genügen ihm Papier, ein Bleistift, Zirkel und Geodreieck, sowie etwas zum Basteln.

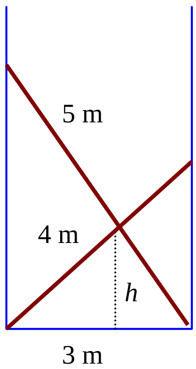
Manchmal ist es tatsächlich ganz schön und auch erhellend, wenn man sich funktionale Abhängigkeiten abschließend noch mit einer x-y-Grafik vor Augen führen kann. Auch das geht mit den genannten Utensilien. Bevor aber die Kurvenberechnungen in nervtötende Routinearbeit ausarten, sollte man – sozusagen als letztes Mittel – ein Computerprogramm zu Hilfe nehmen. Besonders gut geeignet sind Tabellenkalkulationsprogramme wie Excel. Sie sind einfach zu bedienen und dabei sehr leistungsstark. Und sie bieten ein großes Maß an Transparenz: Man kann noch sehen, was passiert, und man kann es vollständig kontrollieren.

Probleme

1 Eine Beweis

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC und ein beliebig gewählter innerer Punkt D. Es ist zu *beweisen*, dass der Umfang des Dreiecks ABD kleiner ist als der Umfang des Dreiecks ABC.





2 Stäbe im Brunnen

Zwei Stäbe, einer 4 m, der andere 5 m lang, sind in einen Brunnen gefallen. Der Durchmesser des Brunnens beträgt 3 m. Die Stäbe berühren sich und sie liegen in derselben senkrecht stehenden Ebene – so wie das in der Skizze dargestellt ist. Wie hoch über dem Boden liegt der Punkt, in dem sich die Stäbe berühren? In der Skizze ist die gesuchte Höhe mit h bezeichnet.

3 Wie alt sind die Söhne?

Zwei Männer treffen sich auf der Straße. Sie sprechen über dies und das. „Sie sind Professor für Mathematik. Ich habe hier ein Problem für Sie. Heute ist ein besonde-

[2] Angeregt zu dieser Problemsammlung hat mich das Buch „How to Solve It: Modern Heuristics“ von Zbigniew Michalewicz und David B. Fogel (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000). Die ersten drei Probleme und das neunte sind aus diesem Werk. Aber Vorsicht: Das Buch gehört *nicht* in die Sparte Unterhaltungsmathematik. Es wendet sich an Informatiker und hat den Algorithmenentwurf zum Gegenstand.

rer Tag für mich. Meine drei Söhne feiern heute ihren Geburtstag. Können Sie mir sagen, wie alt sie sind?“ – „Sicher. Sie müssen mir aber noch etwas über Ihre Söhne sagen.“ – “Stimmt. Also: Wenn ich die Alterszahlen meiner Söhne miteinander multipliziere, ergibt sich 36.“ – „Schön, aber ich brauche mehr als das.“ – „Zähle ich die Alterszahlen meiner Söhne zusammen, komme ich auf eine Zahl, die so groß ist, wie die Zahl der Fenster in diesem Gebäude hier.“ Der Mathematiker denkt eine Weile nach und sagt: „Ich brauche noch einen Hinweis.“ – „Gut. Mein ältester Sohn hat blaue Augen.“ – „Jetzt kenne ich die Lösung“, sagt der Mathematiker. Was hat der Mathematiker herausgefunden? Wie ist er darauf gekommen?

4 Halbkreis

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei unabhängig und rein zufällig gewählte Punkte eines Kreises auf einem Halbkreis liegen?

5 Die drei Wägungen[3]

Von zwölf Kugeln, die alle genau gleich aussehen, sind elf auch gleich schwer; nur eine hat ein abweichendes Gewicht. Zur Verfügung steht eine Balkenwaage, die nur anzeigt, auf welcher Waagschale das größere Gewicht liegt oder ob Gleichgewicht herrscht. Wie kann man durch höchstens drei Wägungen die besondere Kugel finden und bestimmen, ob sie schwerer oder leichter als jede der anderen ist? (Für die Lösung dieses Problems sollten Sie sich etwas Zeit nehmen.)

6 Drei Kandidaten und fünf Hüte.

In einem Königreich ist ein Ministerposten neu zu besetzen. Der König leitet das Auswahlverfahren höchstpersönlich. Er will den intelligentesten Vertreter seines Volkes. Drei Kandidaten sind nach strengen Prüfungen übrig geblieben. Es kommt zur entscheidenden Prüfung, in der der schnellste Denker herausgefunden werden soll. Man zeigt den Dreien fünf Hüte: drei rote und zwei blaue. Dann bekommen sie die Augen verbunden und der König setzt jedem von ihnen einen roten Hut auf. Die beiden blauen Hüte werden weggeräumt. Nun werden den Kandidaten die Augenbinden abgenommen. Jeder kann seine Mitbewerber sehen und auch deren Hüte. Seinen eigenen Hut kann er nicht sehen. Der König sagt nun: Ich habe jedem von euch einen der Hüte aufgesetzt, die ihr vorher sehen konntet. Wer mir nun als erster sagt, von welcher Farbe sein Hut ist, der bekommt den Ministerposten.

Nach einer kleinen Weile meldet sich einer der Kandidaten zu Wort und sagt: „Ich muss einen roten Hut aufhaben.“ Er wird Minister. Wieso konnte er sich seiner Antwort so sicher sein?

7 Mathematiker und Physiker[4]

Schade, dass man Winkel konstruktiv nicht dritteln kann“, seufzt der Mathematiker. Der Physiker, der gerade Wagners „Ritt der Walküren“ auf den Plattenteller werfen will, entreißt dem Mathematiker Lineal, Zirkel und Stift. Zusammen mit seiner Lieblingsplatte drittelt er damit einen Winkel, der auf Papier gezeichnet ist. Wie?

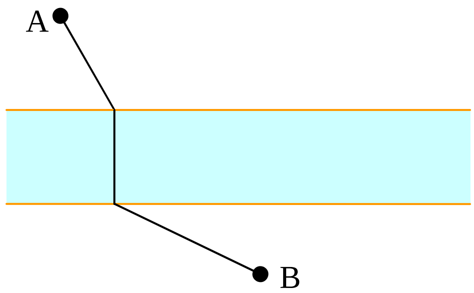
[3] Spektrum der Wissenschaft, Preisrätsel, Juli 2000, S. 111

[4] Spektrum der Wissenschaft, Preisrätsel, Juli 1996, S. 133

8 Das Porträt[5]

Ein Mann blickt auf ein Porträt an der Wand und sagt: „Ich habe weder Brüder noch Schwestern, aber dieses Mannes Vater ist meines Vaters Sohn.“ Vor wessen Bild steht er?

9 Die Brücke

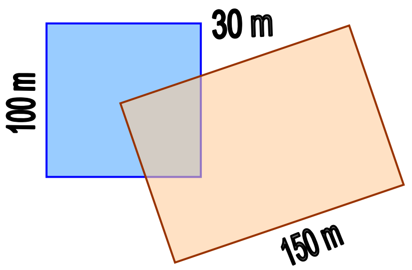


Zwischen den Städten A und B soll eine Straße gebaut werden, und zwar eine möglichst kurze. Außer dem Fluss zwischen den Städten gibt es keine weiteren Hindernisse. An welcher Stelle muss die Brücke errichtet werden?

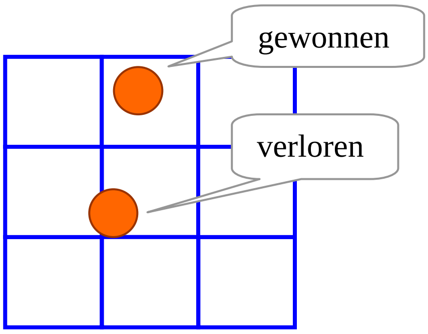
10 Würfelspiele[6]

Vergleichen Sie die folgenden beiden Spiele. Beim ersten muss der Spieler mit vier Würfen wenigstens eine Sechs würfeln, um zu gewinnen. Beim zweiten Spiel hat er 24 Würfe mit zwei Würfeln. Er gewinnt, wenn er zwei Sechsen gleichzeitig hat. Bei welchem der beiden Spiele ist die Gewinnchance größer?

11 Claims



Der Goldgräber Lem vom Klondyke hat Schwierigkeiten. Bei Vermessungsarbeiten ist etwas schief gegangen. Toms benachbarte Parzelle und Lems eigene überlappen sich schräg (s. Skizze). Eine Ecke von Toms größerer rechteckiger Parzelle liegt genau im Zentrum der Parzelle Lems, die einen quadratischen Zuschnitt hat. Eben ist Lem auf eine viel versprechende Goldader gestoßen. Zur Umgehung eines längeren Rechtsstreits hat er mit Tom vereinbart, dass er einen Anteil bekommt. Dieser Anteil berechnet sich aus der Hälfte der Überlappungsfläche bezogen auf die gesamte Parzelle Lems. Wie groß ist dieser Anteil?



12 Münzenspiel

Sie lassen ein Eincentstück über eine kleine Rutsche auf eine Fläche rollen, die in lauter Quadrate aufgeteilt ist. Nur wenn das Eincentstück vollständig innerhalb eines solchen Quadrats liegen bleibt, haben Sie gewonnen. Wie groß sind Ihre Gewinnchancen? Die Münze hat einen Durchmesser von 16 mm und die Quadrate haben eine Seitenlänge von 30 mm.

13 Wie weit sieht der Astronaut?

Die in Lausanne ansässige Weltluftsportföderation hat den Beginn des Weltalls in einer Höhe von 100 km über der Erde festgelegt. SpaceShipOne ist das erste privat entwickelte und finanzierte Raumschiff, das diese Höhe erreicht hat und wieder sicher gelandet ist (Fuldaer Zeitung vom 22.6.04, Seite 5). Welchen Ausschnitt der Erdoberfläche kann der Astronaut in dieser Höhe überblicken? Schätzen Sie die Entfernung zur Kimm (sichtbarer Horizont).

---

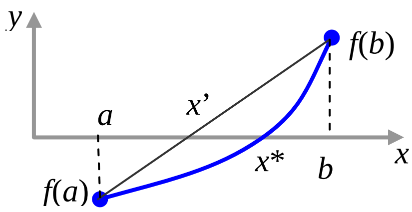
[5] Marilyn vos Savant: Brain Building. Rowohlt Taschenbuch, Reinbeck bei Hamburg 1997, S. 89

[6] Diese und die folgenden zwei Probleme sind aus dem Heftchen „MENSA QUADRAT“ von Victor Serebriakoff (Hugendubel Verlag, München, 1987)

14 Unendlich viele x

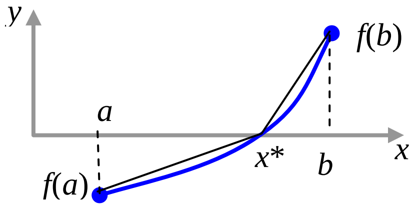
Die Gleichung $3 = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ ist nach x aufzulösen.

15 Die Jahrhundertentdeckung[7]



Eine stetige Funktion möge an den Rändern des Intervalls [a, b] verschiedene Vorzeichen annehmen. Dann hat sie nach dem Zwischenwertsatz in diesem Intervall eine Nullstelle, also einen Wert x^*, für den $f(x^*)=0$ ist. Diese Nullstelle ist gesucht.

Ein Näherungsverfahren zur Lösung des Problems ist die Regula falsi, die Sie vermutlich noch aus der Schule kennen: Die Verbindungsgerade zwischen den Punkten (a, $f(a)$) und (b, $f(b)$) schneidet die Abszisse bei einem Wert x', der im allgemeinen schon sehr nahe an der Nullstelle x^* der Funktion f liegt. Dieses Verfahren kann man immer wieder anwenden und man kommt so zu immer besseren Näherungen.



Hier ist ein Vorschlag, wie man die exakte Lösung in einem einzigen Schritt finden kann.

Ich lege eine Gerade durch die Punkte (a, $f(a)$) und (x^*, 0) und eine weitere durch die Punkte (b, $f(b)$) und (x^*, 0). Ich stelle die zugehörigen Geradengleichungen auf und bestimme den Schnittpunkt. Daraus sollte sich dann – wenn alles gut geht – der Wert der gesuchten Nullstelle x^* ergeben.

Hier sind die beiden Geradengleichungen:

$$y = \frac{x-x^*}{a-x^*}\cdot f(a)$$

$$y = \frac{x-x^*}{b-x^*}\cdot f(b)$$

Sei nun (x, y) der Schnittpunkt der beiden Geraden. Ich setze gleich:

$$\frac{x-x^*}{a-x^*}\cdot f(a) = \frac{x-x^*}{b-x^*}\cdot f(b) \qquad (*)$$

Der Faktor x-x^* hebt sich heraus. Nachdem ich die Gleichung mit den Nennerausdrücken multipliziert habe, erhalte ich $(b-x^*)\cdot f(a) = (a-x^*)\cdot f(b)$. Daraus lässt sich die gesuchte Nullstelle eliminieren:

$$x^* = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Zugegeben, die Idee ist nicht von mir. Aber genial ist sie, nicht wahr? Was sagen *Sie* dazu?

[7] Aus „Logischen Katastrophen auf der Spur“ von Andrej Grigorjewitsch Konforowitsch (Fachbuchverlag Leipzig 1992), S. 90.

16 Wie heißt der Lokführer? [8]

Das Personal des Transcontinental-Expresses besteht aus dem Schaffner, dem Heizer und dem Lokführer. Die drei heißen Jones, Miller und Babbitt. Aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Drei promovierte Reisende in diesem Zug haben zufällig dieselben Namen: Dr. Jones, Dr. Miller und Dr. Babbitt.

a) Dr. Babbitt wohnt in Chicago.

b) Dr. Jones verdient 2 500 Dollar monatlich.

c) Der Schaffner wohnt auf halber Strecke zwischen Chicago und New York.

d) Sein Nachbar, einer der Passagiere, verdient genau dreimal so viel wie er.

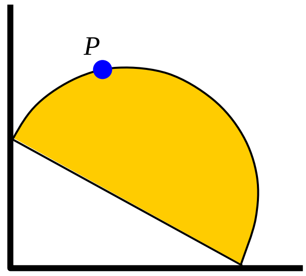
e) Der Namensvetter des Schaffners wohnt in New York.

f) Miller besiegt den Heizer im Schach.

Wie heißt der Lokführer?

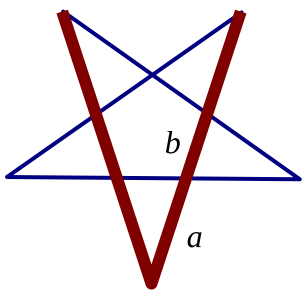
17 Die rutschende Halbkreisscheibe[9]

Eine halbe Kreisscheibe gleitet entlang der Schenkel eines rechten Winkels. Auf welcher Kurve bewegt sich der auf der Peripherie des Halbkreises liegende Punkt P?



18 *V*

Ich will über die Begegnungen mit V erzählen und über mehr oder weniger wundersame Zusammenhänge. Wenn Ihnen bei meinem nun folgenden Gedankenspaziergang etwas Beweiswürdiges auffällt, zögern Sie nicht, den Beweis zu führen. Hier ist Ihre Kreativität gefragt. (Lösungsvorschläge mache ich bei dieser Aufgabe nicht. Sie sind in den Lehrbüchern zur elementaren Mathematik zu finden, beispielsweise im Mathematik-Duden.)



Für mich begann alles mit dem Film „V wie Vendetta“ (2006). Der Held nennt sich V, nach der Nummer der Zelle, in der er eingekerkert war: Fünf. Es ist ein beliebtes Spiel unter Kinogängern, herauszufinden, wo überall in dem Film ein V oder die Zahl Fünf erscheint: bei der Zeigerstellung der Uhr, den Schnitten des Degens, dem Feuerwerk, einem Bild an der Wand, auf den Tasten der Jukebox.

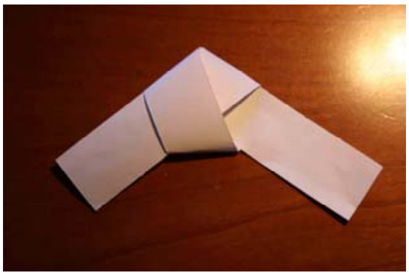
Die Fünf ist von alters her ein Symbol der belebten Natur. Die Fünfzähligkeit zeichnet die Rosengewächse aus. Schneiden Sie einmal einen Apfel quer durch und schauen Sie sich das Kerngehäuse an. Weitere Beispiele sind die fünf Finger unserer Hand und der fünfarmige Seestern.

Dem regelmäßigen Sternfünfeck, dem Pentagramm, wurden bereits in der Antike magische Kräfte zugeschrieben. Heute sieht man es oft auf zwei seiner Spitzen gestellt. Beim Drudenfuß, er soll bis in unsere Tage hinein der Abwehr böser Geister dienen, weist eine Spitze zur Erde. Hier entdecken wir das V schon wieder.

---

[8] Aus dem Buch „Probleme lösen - In komplexen Zusammenhängen denken“ von Robert Sell und Ralf Schimweg. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002 (6. Auflage)

[9] Das Problem habe ich aus einem Vortrag von Prof. Dr. Regina Bruder von der TU Darmstadt (Konzepte für nachhaltiges Lernen, Kaiserslautern 7.2.2006). Als Quellen nennt sie Distler, Bensheim, und eine ungarische Fernsehshow von 1979.



Die Spitzen des Pentagramms bilden ein regelmäßiges Fünfeck, ein Pentagon. Das Zentrum des Pentagramms ist ebenfalls von einem Pentagon umgeben. Ein Pentagon entsteht beispielsweise auch beim Knüpfen eines einfachen Knotens (Überhandknoten) mit einem Streifen Papier.

Im Pentagramm ist alles goldener Schnitt. Genauer: Zu jeder Strecke (oder Teilstrecke) lässt sich im Pentagramm eine weitere Strecke finden, die zu ihr im Verhältnis des goldenen Schnittes steht. Zur Erinnerung: Eine Strecke ist im goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke verhält wie die größere Teilstrecke zu kleineren.

Im obigen Pentagramm habe ich mit *a* und *b* die Längen von Streckenabschnitten bezeichnet. Eine Strecke von Spitze zu Spitze hat die Länge $2a + b$. Tatsächlich gelten die Gleichungen des goldenen Schnittes, nämlich $\frac{2a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Das Streckenverhältnis des goldenen Schnittes wird zuweilen mit dem griechischen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet: $\Phi = a/b$. Φ ist Lösung der Gleichung $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ und hat den Wert $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803398874989...$

Der goldene Schnitt wird vom Menschen als besonders harmonisches Streckenverhältnis empfunden. „Die göttliche Proportion … ist der goldene Schnitt… So lässt sich vielleicht die Vorliebe für fünfeckige Strukturen in der gotischen Kunst vor allem in den Verstrebungen der Rosetten der Kathedralen erklären“[10].

Damit sind wir unversehens vom Kino über Magie und Mathematik zur Architektur und zu den schönen Dingen gekommen. Von hier aus mache ich nun einen kühnen Sprung hinein in die Populationsbiologie. Wie viele Kaninchenpaare kann ein Kaninchenpaar im Laufe der Zeit erzeugen? Diese Kaninchenaufgabe hat Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, im Jahre 1202 gestellt.

Aus dem Lehrbuch des Fibonacci: „Das Weibchen eines jeden Kaninchenpaares gebiert von Vollendung des zweiten Lebensmonats an allmonatlich ein neues Kaninchenpaar.“ Es ist die Zahl der Kaninchenpaare im Laufe der Monate zu berechnen unter der Voraussetzung, dass anfangs nur ein Kaninchenpaar vorhanden ist und dass die Kaninchen nicht sterben.

Die Zahlenfolge für die Anzahl der Kaninchenpaare ist 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Das sind die Fibonacci-Zahlen. Und so lautet das Bildungsgesetz dieser Zahlen: Ab der Zahl 2 ist jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger.

Wir bilden nun die Quotienten je zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, und zwar teilen wir die größere der beiden durch die kleinere. Diese Werte streben gegen einen Grenzwert, nämlich gegen die Zahl Φ des goldenen Schnittes. Und damit sind wir wieder beim Pentagramm, der Zahl Fünf und bei „V wie Vendetta“.

Und was ist der tiefere Sinn des Ganzen? Es gibt ihn nicht. Da ist nichts Mystisches, keine unerklärliche Magie – da ist nur Spiel.

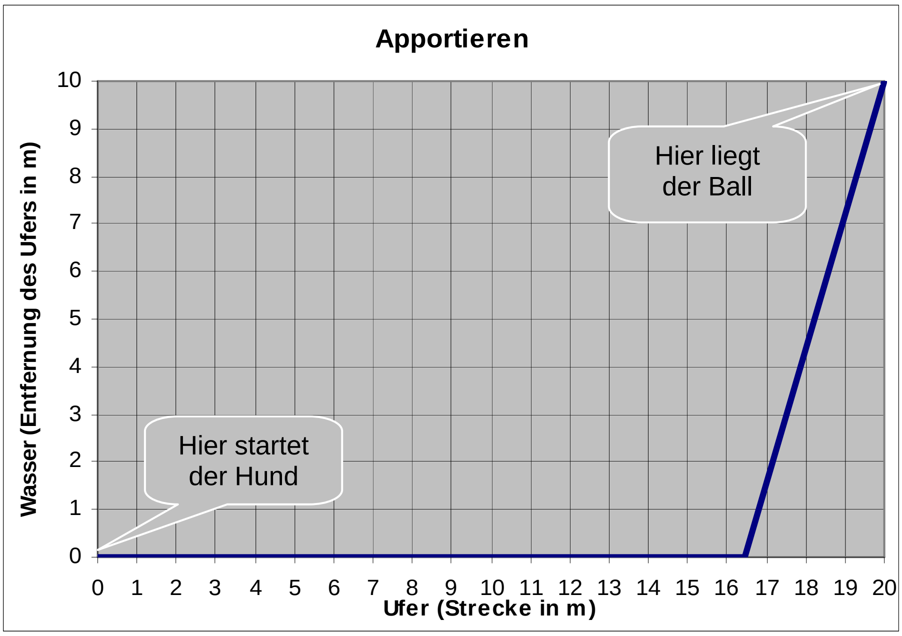
[10] Eco, Umberto: Die Geschichte der Schönheit. Hanser, München, Wien 2004, S. 66 ff.

V ist ein sehr einfaches Symbol. Es ist kein Wunder, dass wir es hin und wieder sehen können. Denselben Effekt ruft das „Gesetz der kleinen Zahl“ hervor: Eine Zahl wie die Fünf begegnet uns eben immer wieder einmal[11].

Und die „Sinnsuche unseres Wahrnehmungsapparats“ schreckt vor kleineren Manipulationen nicht zurück, wie oben bei der leichten Drehung des Pentagramms (Drudenfuß). Auch wird manch „wundersamer“ Fund in der Bedeutung gern überbewertet. Dem Standardwerk zur europäischen Baukunst entnehme ich beispielsweise die Bemerkung[12]: „Der *Goldene Schnitt* … wird in der Kunst weit seltener angewendet als allg. angenommen wird.“

Aber was sagen Sie dazu: Das Symbol V hat den Morsecode „…-“, „didididaaa“. Da kommt Ihnen etwas in den Sinn? Musik? Eine Symphonie? Von Beethoven? – Richtig: Es ist die Fünfte.

19 Das Ballfang-Problem[13]



Tim geht mit seinem Corgi am Ufer des Sees spazieren. Hin und wieder lässt er den Hund einen Gegenstand apportieren. Wenn er einen Ball ins Wasser wirft, beobachtet Tim, dass der Hund erst ein Stück am Ufer entlang läuft, bevor er ins Wasser springt und direkt auf den Ball zu schwimmt. Der Hund läuft nicht ganz bis auf die Höhe des Balles. Er stürzt sich bereits etwas vorher ins Wasser. Tim möchte wissen, ob da mehr dahinter steckt als Zufall oder Willkür. Er beobachtet die Sache genauer und stellt fest, dass der Punkt, an dem der Hund ins Wasser springt, ziemlich geschickt gewählt ist. Sein Hund scheint ein Gespür dafür zu haben, wie er am schnellsten den Ball erreicht. Wo liegt der Punkt für den Sprung ins Wasser? Nehmen Sie an, dass der Hund zehnmal schneller laufen kann als schwimmen und dass Tim den Ball 10 m weit vom Ufer weggeworfen hat.

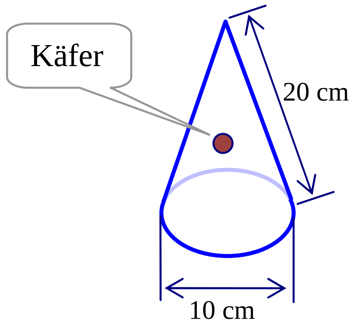
[11] Wer an solchen „mathematischen Exkursionen“ seinen Spaß hat, dem empfehle ich das Buch „Fünf Minuten Mathematik – 100 Beträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT“ von Ehrhard Behrends (Vieweg, Wiesbaden 2006).

[12] Koch, Wilfried: Baustilkunde. Bertelsmann Lexikon Verlag, Gütersloh 2000

[13] Devlin, Keith: Der Mathe-Instinkt. Warum Sie ein Genie sind und Ihr Hund und Ihre Katze auch. Klett-Cotta, Stuttgart 2005

20 Der Weg des Käfers[14]

Auf einem Kegel, dessen kreisförmige Grundfläche einen Durchmesser von zehn Zentimetern und dessen Flanke eine Länge von 20 Zentimetern hat, sitzt auf halber Höhe ein Marienkäfer. Der Käfer krabbelt einmal um den Kegel herum und gelangt wieder zu seinen Ausgangspunkt zurück. Zufällig hat er den kürzestmöglichen Weg genommen. Wie ist der Käfer gekrabbelt? Und wie lang ist sein Weg?



21 Der fallende Schornstein

Am 10. März 2008 meldet die Fuldaer Zeitung: „Erfolgreiche Sprengung – Kamin der alten Molkerei fiel um wie ein Baum… Die Sprengung des 45 Meter hohen Kamins der alten Molkerei in der Dalbergstraße war ein Spektakel der Sonderklasse. Hunderte Schaulustige verfolgten am Samstag, wie der Turm pünktlich um 12.30 Uhr wie ein Baum umstürzte. Jetzt können die Bauarbeiten für die Dalberg-Arkaden beginnen.“
Einwand: Ein gemauerter Schornstein fällt gewöhnlich nicht um wie ein Baum oder ein starrer Stab. Er bricht etwa in der Mitte durch, und der obere Teil sackt förmlich in sich zusammen. In meinem Bild sieht man, wie der Bruch gerade entsteht. Warum brechen gemauerte Schornsteine, wenn sie umfallen?

22 Das erste Ass[15]

Ein Kartenstapel mit 52 Spielkarten, darunter vier Asse, wird gut gemischt. Nun werden der Reihe nach die Karten von oben nach unten aufgedeckt. Wie viele Karten muss man im Mittel aufdecken, bis das erste Ass erscheint?

23 Rentenpläne[16]

Eine Firma bietet ihren Mitarbeitern an, im Zuge der Altersvorsorge Aktien des Unternehmens zu erwerben. Für den Erwerb gibt es zwei Möglichkeiten: Nach Plan A zahlt der Mitarbeiter jeden Monat einen festen Betrag ein und dafür erhält er Anteilscheine zum jeweils aktuellen Kurs. Nach Plan B erwirbt der Mitarbeiter Monat für Monat eine bestimmte Anzahl von Anteilen. Bei Plan A hängt die Zahl der Anteile und bei Plan B hängt der monatlich einzuzahlende Betrag vom jeweiligen Aktienkurs ab. Gebühren fallen keine an. Bei welchem Plan sind die Kosten je Anteil am geringsten?

[14] FOCUS 3/2005, S. 43

[15] Michalewicz, Zbigniew und Matthew: Puzzle-Based Learning. Melbourne 2008 (Puzzle 9.6).

[16] Michalewicz, Zbigniew und Matthew: Puzzle-Based Learning. Melbourne 2008 (Puzzle 12.10).

24 Zufall oder nicht?

In der Datenübertragung werden bestimmte Zeichenfolgen – sagen wir der Länge *k* – für die Synchronisation vorgesehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Bitmuster in einer rein zufälligen Zeichenfolge der Länge *n* vorkommen und als Synchronisationsfolge missdeutet werden kann?

Dieses Synchronisationsproblem ist verwandt mit dem folgenden Problem[17]: Welches der beiden folgenden Bitmuster der Länge zweihundert ist durch reinen Zufall entstanden, welches nicht. „Durch Zufall entstanden“ meint hier, dass für jedes Bit eine faire Münze geworfen worden ist und dass für den Fall, dass Kopf oben liegt, eine Null hingeschrieben wird, und für den Fall, dass es die Zahl ist, eine Eins.

Das erste Bitmuster:

```
010010110111100000011101011111100010111001001011001011100111100011101
011110110001011100011100001001000101000011100101110011111011110000100
10100011011000000111010010011100101000010011101011010011101110
```

Die zweite Bitmuster:

```
100010111111011101000001000000000100101100110100100101001100011101001
110111000100010100010101101110001110101001000000001100000100111001110
11001011001111001100000111101110101100100001111100110001111011
```

Das zweite Muster scheint verdächtig: Es enthält acht Nullen in Folge. Und das ist doch ein sehr unwahrscheinliches Ereignis: Dass eine geworfene Münze achtmal hintereinander Kopf zeigt, kommt selten vor. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses ist gleich $1/2^8$, und das sind weniger als vier Promille.

Tatsächlich ist dieses zweite Muster rein zufällig entstanden, das erste nicht. Auch beim ersten Muster spielt der Zufall eine Hauptrolle. Aber beim näheren Hinsehen stellt sich heraus, dass die Folge aus fünfzig Abschnitten aus je vier Bits zusammengesetzt ist, und in jedem dieser Abschnitte gibt es eine oder drei Einsen, niemals aber null, zwei oder vier Einsen. Auf diese Weise kann es niemals zu mehr als sechs aufeinander folgenden Nullen kommen.

Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Folge aus zweihundert Bits ein Abschnitt mit acht aufeinander folgenden Nullen auftritt?

[17] Havil, Julian: Das gibt’s doch nicht! Mathematische Rätsel. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2009 (Kopf oder Zahl? S.85 ff.)

Probleme für Fortgeschrittene[18]

Zahlenreihe

Welche Zahl gehört anstelle des Fragezeichens?

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, ?, 10000

Einige Hinweise: Die Folge ist nicht verlängerbar. Die Lösung hat etwas mit der Zahl sechzehn zu tun. Und 10000 hat nicht den Wert zehntausend.

Einunddreißig Logiker

Einunddreißig Logiker aus verschiedenen Ländern nehmen an der jährlichen internationalen Logikkonferenz teil. Um sicherzustellen, dass nur Logiker teilnehmen, müssen die Teilnehmer an einem Test teilnehmen. Der Tagungsleiter erklärt: Jeder der 31 Teilnehmer bekomme einen Farbpunkt auf die Stirn. Jeder könne die Farbpunkte der anderen sehen, seinen eigenen aber nicht. Jedwede Kommunikation zwischen den Teilnehmern sei untersagt. Jeder der Teilnehmer solle möglichst schnell herausfinden, welche Farbe sein Punkt habe. Er werde eine Glocke läuten und jeder, der zu diesem Zeitpunkt die Farbe des Punktes auf seiner Stirn erraten habe, müsse den Saal verlassen. Die Glocke werde er so oft wie nötig läuten. Er sei über die Farbpunkte vollständig informiert und wisse von jedem der Teilnehmer, zu welchem Zeitpunkt er den Raum verlassen müsse (sofern er Logiker ist).

Einer der Teilnehmer meldet sich und fragt, ob es möglich sei, den Test zu bestehen – also die Farbe des Punktes auf der eigenen Stirn zu erraten. Der Tagungsleiter antwortet, dass er die Farben der Punkte so gewählt habe, dass jeder Teilnehmer die Farbe seines Punktes zur rechten Zeit schlüssig ermitteln könne.

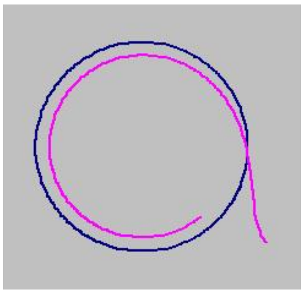
Da keine weiteren Fragen kommen, beginnt der Test. Der Tagungsleiter platziert die Farbpunkte auf den Stirnen der Teilnehmer und gibt Gelegenheit, sich umzuschauen. Nach einer Weile läutet er die Glocke. Daraufhin verlassen vier Teilnehmer den Raum. Beim zweiten Läuten gehen alle Teilnehmer mit roten Punkten. Beim dritten Läuten rührt sich keiner. Beim vierten Läuten geht wenigstens einer hinaus. Erneutes Läuten. Jetzt geht der Teilnehmer, der vor Testbeginn die einzige Frage gestellt hat. Mit ihm gehen seine Schwester und weitere Teilnehmer. Der Fragesteller und seine Schwester haben verschiedenfarbige Punkte. Danach sind noch Teilnehmer im Raum.

Angenommen, alle Teilnehmer sind Logiker und verlassen den Raum zur rechten Zeit: Wie oft muss der Tagungsleiter läuten?

---

[18] Zu diesen *Problemen für Fortgeschrittene* mache ich keine Lösungsvorschläge. Der Problemlöser sollte die Angemessenheit seiner Lösungen selbst beurteilen können. Einige der Probleme erfordern große Anstrengungen, dafür machen sich die Lösungen ziemlich spektakulär bemerkbar – durch das Auslösen von Glücksgefühlen. Süchtigen auf der Suche nach mehr von solch „hartem Stoff“ gebe ich ein paar Literatur-Tipps:

Serebriakoff, Victor: Mensa. 2. Aufl. Hugendubel, München 1991
Serebriakoff, Victor: Mensa Quadrat. Hugendubel, München 1987
Engel, Michael: Denksporträtsel für Geniale. öbv & hpt, Wien 2001
Engel, Michael: Neue Denksporträtsel für Geniale. öbv & hpt, Wien 2004
Michalewicz, Zbigniew und Matthew: Puzzle-Based Learning. Melbourne 2008



Fahrradartistik

Der ein Meter achtzig große Artist steigt aufs Fahrrad und durchfährt einen nahezu perfekten Kreis. Die Reifenspuren zeichnen sich im weichen Boden ab und ergeben das nebenstehende Bild. Wie groß ist der Durchmesser des durchfahrenen Kreises etwa?

Wie viele Fehler blieben unentdeckt?

Im Manuskript eines Buches fand der Herausgeber 50 formale Fehler (Schreibfehler und dergleichen). Unabhängig davon entdeckte der Autor beim Korrekturlesen 110 Fehler, darunter 22, die bereits der Herausgeber entdeckt hatte. Damit waren insgesamt also 110+50-22 = 138 Fehler bekannt. Auf Basis dieser Daten schätzte der Autor ab, wie viele Fehler nach der Berichtigung im Buch wohl noch verbleiben würden. Daraufhin wurde eine dritte Person für das Korrekturlesen gewonnen. Anreiz war eine Belohnung von (umgerechnet) 1 € je gefundenen Fehler. So wurden 50 weitere Fehler gefunden. Nach Korrektur aller erkannten Fehler ging das Buch in Druck. Wie viele formale Fehler wird das Buch nach Drucklegung wohl noch enthalten haben?

Es werde Licht

Sieben Lampen sind kreisförmig angeordnet. Zu jeder Lampe gehört ein Taster zum Ein- und Ausschalten, wie bei einer Nachttischlampe. Mit einem Tastendruck wird die zugeordnete Lampe umgeschaltet. Dummerweise aber nicht nur die: Mit ihr werden die beiden benachbarten Lampen ebenfalls umgeschaltet. Gegeben ist ein Startzustand: Einige der Lampen sind an, einige aus. Die Aufgabe lautet, mit möglichst wenig Tastendrücken alle Lampen anzuschalten.