Bienenwabe

Ein Optimierungsproblem

Timm Grams, Fulda, 8. Oktober 2010 (rev. 12.10.10)

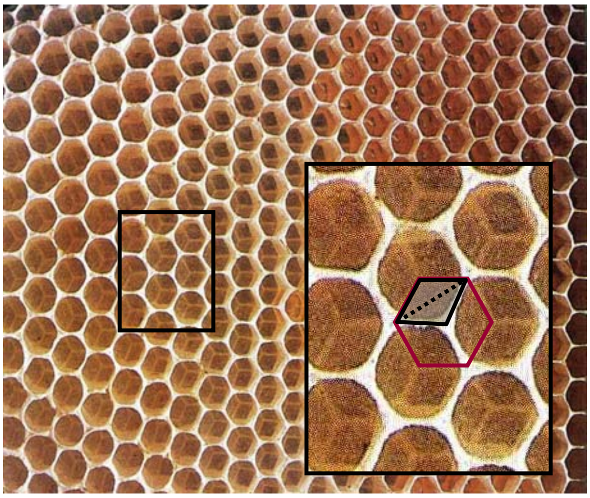
Vorbemerkung

Die Optimallösungen der Natur werden gern als praxisnahe Beispiele im Mathematikunterricht verwendet. An ihnen lässt sich demonstrieren, wofür die Infinitesimalrechnung gut ist und was man mit den transzendenten Funktionen anfangen kann. Aber genau diese Fixierung auf bestimmte mathematische Gegenstände führt zuweilen zur unangemessenen Behandlung der Themen. Ein Musterbeispiel ist für mich die total überdrehte Behandlung des Ballfangproblems durch Keith Devlin („Elvis: Der Hund als Differentialrechnungskünstler", 2005). Meine Meinung dazu finden Sie im Netz (Ein Unding mit Konzept. Kurzinformation zum Fuldaer Brückenkurs Mathematik).

Es ist sicherlich richtig, den Lernenden die Mathematik anhand solcher „naturgegebenen" Beispiele nahe zu bringen. Aber zuweilen wird „mit Kanonen auf Spatzen geschossen". Was hat beispielsweise die Form der Bienenwabe mit transzendenten Funktionen zu tun? Und braucht man zum Nachweis der Optimalität tatsächlich die Infinitesimalrechnung? Was habe ich davon, den Winkel zwischen Begrenzungsflächen der Bienenwaben zu berechnen?

Ich stelle mich hier auf den Standpunkt des Ingenieurs. Er denkt konstruktiv und fragt: Wozu brauche ich das und was davon ist wirklich nötig? So ganz nebenbei eröffnet sich dann auch noch die Möglichkeit zum Bau eines physikalischen Modells. Und diese Möglichkeit sollte man in der Ausbildung nutzen: Das Anfertigen von Papiermodellen beispielsweise stellt keine großen apparativen Anforderungen und es fördert die Feinbeweglichkeit der Hände. Und körperliche Bewegung gehört zum Besten, was man für das Gehirn tun kann.

Einführung



Das Bild zeigt eine Bienenwabe mit den typischen Zellen: Der Grundriss einer solchen Zelle ist ein regelmäßiges Sechseck. Diese Zellen lassen sich lückenlos – sozusagen ohne Verschnitt – aneinanderfügen. Das ginge auch mit anderen regelmäßigen Vielecken: mit dem gleichseitigen Dreieck und mit dem Quadrat. Aber aus einer Reihe von Gründen ist das Sechseck vorzuziehen. Insbesondere ist hier der Wachsverbrauch für die Zellwände bei gegebenem zu umbauenden Volumen am günstigsten. Denn: Bei einer Querschnittsfläche einer Zelle der Größe F ergibt sich der Umfang eines Dreiecks zu $\frac{6}{\sqrt[4]{3}} \times \sqrt{F} = 4.56 \times \sqrt{F}$, der eines Quadrats zu $4 \times \sqrt{F}$ und der eines regelmäßigen Sechsecks zu $2\sqrt{2\sqrt{3}} \times \sqrt{F} = 3.72 \times \sqrt{F}$.

Einleuchtender als die Unterstellung eines Optimalverhaltens der Bienen ist diese Überlegung: Die Bienen können möglicherweise nur runde Röhren bauen und diese dicht aneinander legen, Reihe für Reihe um den halben Durchmesser gegeneinander versetzt. Aufgrund der Kohäsion und der Fließfähigkeit des erwärmten Wachses reduziert sich der „Verschnitt" und es entstehen die regelmäßigen Sechsecke. Das geschieht allein nach den Gesetzen der unbelebten Welt, genau so wie Seifenhäute Optimalflächen bilden. Dennoch ist es ganz lehrreich, nachzurechnen, dass diese Anordnung im gewissen Sinne optimal ist.

Hier soll es um eine weitere solche Optimierungsrechnung gehen. Dazu schauen wir uns die Bienenwabe einmal genauer an. Die Bienenwabe hat zwei Schichten: Das Bild zeigt die nach vorne offenen Zellen. Auf dem Zellenboden zeichnen sich die Wände der zweiten Schicht von Zellen ab, die nach hinten offen sind.

Die Schichten sind so gegeneinander verschoben, dass jede Zelle mit drei dahinter liegenden Zellen je ein rautenförmiges Stück Zellenboden gemeinsam hat. Eine der hinten liegenden Zellen ist im Bild rotbraun hervorgehoben und eine der Rauten ist schwarz umrandet.

Wenn man diese Rauten nun um die gestrichelte Linie kippt, kann man erreichen, dass sowohl die Wände der vorderen Zellen als auch die der dahinter liegenden kleiner werden. Dabei vergrößert sich die Fläche der Raute etwas, da sie ja weiterhin an den Wänden anliegen soll. Diese Vergrößerung ist gegenüber der Verringerung der Wandfläche zunächst vernachlässigbar. Wenn man die Raute weiter kippt, nimmt die Rautenfläche in immer größerem Maße zu und ihre Vergrößerung nimmt möglicherweise irgendwann einmal überhand. Die Frage ist, wie weit man die Raute kippen muss, so dass der Wachsverbrauch für Zellböden und Zellwände insgesamt minimal wird?

Das Problem verstehen

Wir folgen der ersten Regel des Puzzle-based Learning (Michalewicz, 2008): *Vergewissere dich, dass du das Problem verstehst. Definiere die grundlegenden Begriffe.*

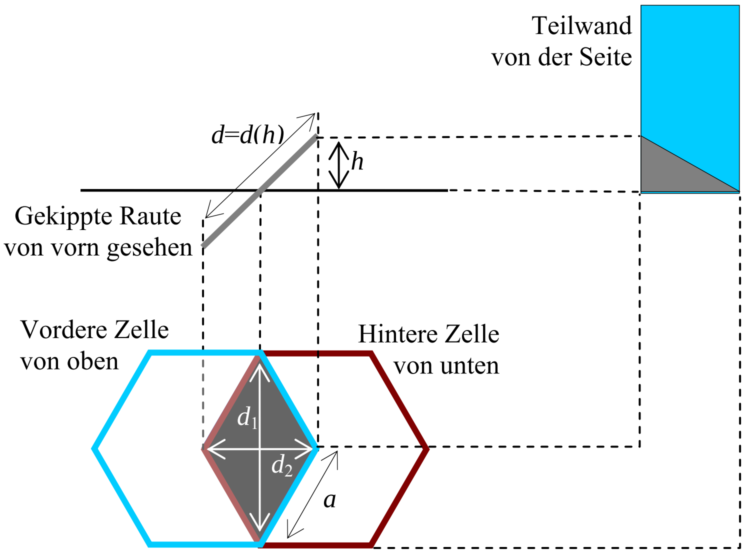
Oben haben wir voreilig vom Umfang auf den Wachsverbrauch geschlossen und eine Rangordnung von gleichseitigem Dreieck, Quadrat und regelmäßigem Sechseck hergestellt. Aber eigentlich geht es gar nicht um den Umfang sondern um den Wachsverbrauch. Dass Umfang und Wachverbrauch proportional sind, sagt uns das Bauchgefühl. Wir vergewissern uns des Zusammenhangs: Bei Vernachlässigung des Zellbodens und gleichem Querschnitt über die gesamte Länge der Zelle wird dieser Zusammenhang wohl gelten. Aber halt: Die Zellwände werden ja von benachbarten Zellen geteilt, nur einige Zellwände am Rande der Wabe nicht. Wir vernachlässigen diese Zellwände der Randzellen. (Unter welchen Bedingungen dürfen wir das tun?) Jetzt gilt, dass jede Wand von zwei Zellen geteilt wird. Wenn wir jeder Zelle die Hälfte des Wachsverbrauchs der Zellwände zuordnen, dann ist dieser Wachsverbrauch je Zelle in der Tat proportional zum Umfang der Zelle. Wir haben mit unserer etwas voreiligen Annahme also durchaus richtig gelegen. Aber jetzt kennen wir einige die implizit getroffenen Annahmen.

Das Ziel quantifizieren

Bei der Bilanzierung der Wachsersparnis durch das Kippen der Bodenrauten ist besondere Vorsicht geboten. Wir wollen das Ziel in quantitative Begriffe fassen. Wir beherzigen also die zweite Regel des Puzzle-based Learning: *Verlasse dich nicht auf dein Bauchgefühl. Rechne!*

Zuerst einmal setzen wir für unsere Rechnung voraus, dass Zellboden und Zellwand gleich dick sind. Fläche und Wachsverbrauch wollen wir demgemäß als zueinander proportional ansehen. Deshalb können wir uns auf eine Bilanzierung der Begrenzungsflächen beschränken.

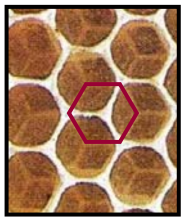
In der Ausgangslage liegen alle Rauten in einer Ebene. Die größere der Diagonalen bezeichnen wir mit d_1, die kleinere mit d_2 und die Seitenlänge des Sechsecks mit a. Die Werte der Diagonalen der Raute sind $d_1 = a\sqrt{3}$ und $d_2 = a$, wie sich leicht nachrechnen lässt. Die größere der Diagonalen behält beim Kippen der Raute ihren Wert, da sie ja die Drehachse bildet. Die andere Diagonale ändert ihren Wert.



Als *Kippmaß* nehmen wir die Höhe h, das ist der größte Abstand der Raute von der ursprünglichen Trennebene. Mit d bezeichnen wir den Wert der kleineren Rautendiagonale. Sie ist vom Kippmaß h abhängig: $d = d(h)$. Es ist $d(0) = d_2 = a$. Die nebenstehenden *Normalprojektionen* veranschaulichen diese Festlegungen.

Die rechte Zelle, die nach hinten offene, ist rotbraun umrandet. Hellblau dargestellt ist die nach vorne offene Zelle. Die den beiden Zellen gemeinsame Grundfläche ist die grau ausgefüllte Raute.

Bei der Bilanzierung der Flächen droht eine Gefahr. Wer sich allein auf die Intuition verlässt, läuft Gefahr, in eine Denkfalle zu geraten: Zu jeder Raute gehören vier Teilwände. Also muss man die Flächenersparnis bei jeder Teilwand mit dem Faktor vier gewichten, oder? Vorsicht! An jeder Teilwand sind zwei Rauten beteiligt. Es empfiehlt sich also, über die Gewichtung von Rauten und Teilwandflächen genauer nachzudenken.

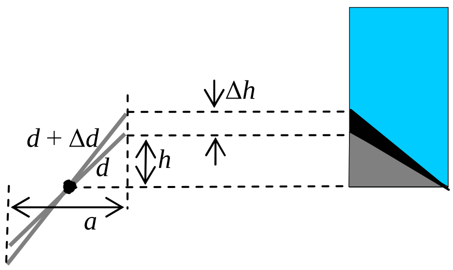


Wir konzentrieren uns zunächst auf die obere Wabe, auf die mit den weißen Wänden. Der braunrot umrandete Ausschnitt erfasst genau drei Teilwände und drei Bodenrauten. Mit diesen Ausschnitten lässt sich die Ebene pflastern und nichts wird dabei doppelt gezählt. Also kommt auf jede Raute genau eine Teilwand der oberen Wabe. Die untere Wabe hat etwa genau so viele Zellen und Teilwände wie die obere Wabe. Also kommen auf jede Raute insgesamt zwei Teilwände.

Mit F^+ bezeichnen wir die Fläche, um die sich eine Raute beim Kippen vergrößert, und mit F^- die Fläche, die gleichzeitig bei einer der Teilwände wegfällt. Bei der Bilanzierung müssen wir eine Flächenersparnis von $2 \times F^-$ gegen die zusätzliche Fläche F^+ aufrechnen.

Die Aufgabe besteht nun darin, diese Flächenbilanz in Abhängigkeit von der Einflussgröße h zu bestimmen und nach dem Wert für h zu suchen, für den sich die geringste Gesamtwandfläche ergibt.

Das Modell vervollständigen



Wir bedenken die dritte Regel des Puzzle-based Learning: *Formuliere ein Modell. Erst dadurch werden Rechnungen und Schlussfolgerungen bedeutungsvoll.*

Das hier gewählte mathematische Modell geht von einer Bodenraute aus, die um das Maß h gekippt ist. Dazu gehört die kleine Diagonale $d = d(h)$. Nun wird das Kippmaß um ein kleines Stück Δh vergrößert: $h + \Delta h$. Dabei vergrößert sich die kleine Diagonale ebenfalls um ein kleines Stück $d(h + \Delta h) = d + \Delta d$.

Die Abhängigkeit der kleinen Rautendiagonale vom Kippmaß ergibt sich aus zweimaliger Anwendung des Satzes des Pythagoras:

$$a^2 + (2h)^2 = d^2$$

$$a^2 + (2h + 2\Delta h)^2 = (d + \Delta d)^2$$

Unter Vernachlässigung der Produkte kleiner Größen ergibt sich daraus

$$\Delta d = \Delta h \frac{4h}{\sqrt{a^2 + (2h)^2}}.$$

Aus diesen kleinen Veränderung ergeben sich diese Flächendifferenzen

$$\Delta F^- = \frac{\Delta h \cdot a}{2} \text{ und}$$

$$\Delta F^+ = \frac{\Delta d \cdot d_1}{2} = \Delta h \frac{2h \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (2h)^2}}.$$

Da auf jede Raute zwei Teilwände kommen, ist also die Flächenersparnis $2\Delta F^-$ gegen die Zusatzfläche ΔF^+ aufzurechnen. Die gesamte Flächenersparnis ist demnach gleich

$$2\Delta F^- - \Delta F^+ = \Delta h \cdot a \cdot \left(1 - \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (2h)^2}}\right).$$

Das Modell optimieren

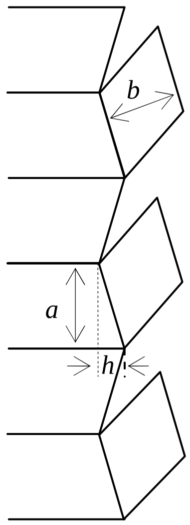
Der Klammerausdruck ist eine monoton fallende Funktion von h. Anfangs (für $h = 0$) hat der Klammerausdruck den positiven Wert 1 und es ergibt sich bei kleinen Zuwächsen Δh eine Ersparnis. Für große h wird der Klammerausdruck negativ und der Trend kehrt sich um. (Für einen elementaren Nachweis der Monotonie dividiert man zunächst Zähler und Nenner des Bruches durch h. Dann kommt h nur noch an einer Stelle vor und die Monotonie des Gesamtausdrucks ergibt sich aus der Tatsache, dass die auf h wirkenden geschachtelten Funktionen allesamt monoton sind.)

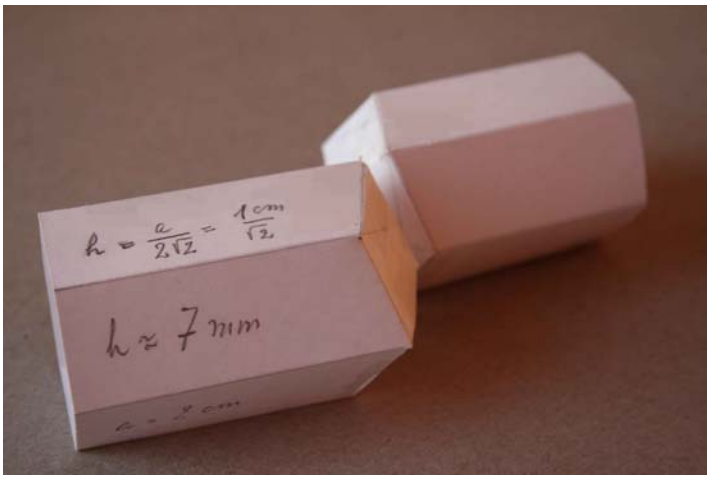
Der Optimalwert ist dann erreicht, wenn der Klammerausdruck gleich null ist. Das optimale Kippmaß ist gegeben durch $h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Die kleine Rautendiagonale ist dann gleich $d(h) = \sqrt{a^2 + (2h)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Das Verhältnis der großen Rautendiagonale zu kleinen ist folglich gleich $\frac{d_1}{d(h)} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3/2}} = \sqrt{2}$. Das Verhältnis der Rautendiagonalen hat sich durch das Kippen vom Faktor $\sqrt{3}$ auf den Faktor $\sqrt{2}$ verringert.

Ergebnis: Konstruktion eines Papiermodells

Für ein Papiermodell der Bienenwabe lässt sich nun leicht die Bemaßung erstellen. Die Maße sind in eine Abwicklung der Bienenwabe eingezeichnet: Die Seitenlänge a des Sechseckgrundrisses, das Kippmaß h und der Abstand b der Rautenseiten voneinander. (Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.)

Die mehrfache Anwendung des Satzes von Pythagoras zeigt, dass $b = a$ ist. Für die Konstruktion des Papiermodells genügen also zwei Maße: a und $h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Der Rest lässt sich durch Abtragen rechter Winkel, Parallelverschiebungen und das Übertragen der Rautenseiten mittels Zirkel erledigen.





Quellenhinweise

Devlin, Keith: Der Mathe-Instinkt. Warum Sie ein Genie sind und Ihr Hund und Ihre Katze auch. Klett-Cotta, Stuttgart 2005

Hemme, Heinrich: Mathematische Unterhaltungen. Die Kunst, mit möglichst wenig Wachsverbrauch jeder Bienenlarve eine Zelle bereitzustellen, raumfüllende Polyeder und die Ästhetik der optimalen Lösung. Spektrum der Wissenschaft, (1994) 6, 12-16

Michalewicz, Zbigniew; Michalewicz, Matthew: Puzzle-based Learning: An introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving. 2008

Pöppe, Christoph: Geometrie. Bienenwaben sind wirklich optimal. Nach dem Beweis der Keplerschen Vermutung hat Thomas Hales ein ebenso traditionsreiches, wenn auch nicht ganz so berühmtes Optimierungsproblem erledigt. Spektrum der Wissenschaft (1999) 11, 12-14

Weigand, Hans-Georg, u. a.: Schülerprojekttage 2010. 20-23. Juli 2010. Fakultät für Mathematik und Informatik Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg, August 2010