Problemlösen 2011

Begleitmaterial zur Lehrveranstaltung

Timm Grams, www.hs-fulda.de/~grams, Fulda, 26. Mai 2011 (rev.: 11.01.12)

Inhaltsverzeichnis

Beschreibung der Lehrveranstaltung

Aus dem Modulhandbuch

Problemlösen (ET540) ist Pflichtveranstaltung (2+0+2) im Masterstudiengang „Systems Design & Production Management" im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Hochschule Fulda. Lehrinhalte gemäß Modulhandbuch:

- *Grundlegende Heuristiken:* Generalisierung, Spezialisierung, Analogie, Variation, Enumeration, Rückwärtssuche, Teile und herrsche.
- *Traditionelle Heuristiken:* Vollständige und lokale Suche, Backtracking, Lineares Programmieren, Greedy Algorithms, Dynamisches Programmieren, Branch and bound, Simulated annealing.
- *Moderne Heuristiken:* Evolutionäre Algorithmen, Behandlung von Randbedingungen, Parametersteuerung, Mutationsoperatoren, Auswahlverfahren, Neuronale Netze, Back Propagation, Fuzzy Systems.

Vereinbarungen zum Ablauf

Die *Übungen* erledigt jeder Teilnehmer für sich allein. Er trägt also die Verantwortung für die exakte Aufgabendefinition, Auswahl der Methode und die Durchführung. Ob er die Sache mit Papier und Bleistift erledigt, mit einem Tabellenkalkulationsblatt oder einem Java-Programm, ist auch seine Sache. Jede Übung wird auf einem Blatt Papier dokumentiert: Ziel, Weg, Ergebnis. Beurteilt wird das Ergebnis dahingehend, ob das selbst gesteckte Lernziel angemessen ist und inwieweit es erreicht wurde. Bei den Denksportaufgaben sollte der Gedankengang im Zuge der Lösungssuche protokolliert werden (Introspektion), auch dann, wenn die Lösung nicht gefunden worden ist.

Für die *Projekte* werden Dreiergruppen – ausnahmsweise auch Zweiergruppen – gebildet. Die Durchführung geschieht in den vier Phasen *Analyse* (Ergebnis: *Pflichtenblatt*) – *Entwurf – Realisierung – Abnahme*. Zum Abschluss einer jeden Phase erstellt die Gruppe ein knappes Dokument, das von allen Mitgliedern der Gruppe zum Zeichen des Einverständnisses vor Eintritt in die nächste Bearbeitungsphase zu unterschreiben ist. Zur Erinnerung: In das Pflichtenblatt gehören unter anderem die Beschreibung der *Produktfunktionen* und der *Bedienoberfläche* sowie (zwingend!) die Auflistung der *Testszenarien* (Eingabedaten und Prognosen). Die Testszenarien sind später die Basis der Abnahme.

Auswahl und Terminierung der Aufgaben werden im Laufe der Lehrveranstaltung bekannt gegeben. Die Dokumente zu den Übungen und Projekten sind bei den abschließenden Fachgesprächen vorzulegen.

Die Lektionen

1. Zur Lehrveranstaltung. Vom Wesen der Ingenieursarbeit. Die Bienenwabe[1]. Probleme zum Einstieg. Puzzle-based Learning. Die Es-geht-einfacher-Heuristik.
2. Klassische Optimierungsverfahren: Steilster Anstieg. Direkte Suche (Hooke-Jeeves). Mutations-Selektions-Verfahren (Rechenberg). Simulated Annealing.
3. Problemtypen: SAT (Satisfiability), NLP (Nichtlineare Programmierung), TSP (Traveling Salesman Problem).
4. Präsentationen
5. Grundlegende Heuristiken: Einbettungsprinzip. Time-Warp-Algorithmus. Rendezvous-Probleme.
6. Klassische Verfahren: Dynamische Optimierung.
7. Moderne Heuristiken: Evolutionsverfahren. Ein Musterprojekt: KoopEgo.
8. Präsentationen
9. Das Drei-Farben-Problem. Ein Musterprojekt vom SAT-Typ.
10. Fabrikplanung. Ein Musterprojekt vom TSP-Typ.
11. Fahrweisensteuerung. Ein Musterprojekt vom NLP-Typ.
12. Präsentationen und Fachgespräche

Literaturhinweise

Aho, Alfred V.; Hopcroft, John E.; Ullman, Jeffrey D.: Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983

Hemme, Heinrich: Die Kunst, mit möglichst wenig Wachsverbrauch jeder Bienenlarve eine Zelle bereitzustellen, raumfüllende Polyeder und die Ästhetik der optimalen Lösung. Mathematische Unterhaltungen. Spektrum der Wissenschaft (1994) 6, 12-16

Holland, John H.: Genetische Algorithmen. Spektrum der Wissenschaft (1992) 9, 44-51

Hooke, Robert; Jeeves, T. A.: „Direct Search“ Solution of Numerical and Statistical Problems. Journal of the ACM 8 (1961), 212-229

Michalewicz, Zbigniew; Fogel, David B.: How to Solve It: Modern Heuristics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000

Michalewicz, Zbigniew; Michalewicz, Matthew: Puzzle-based Learning: An introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving. 2008

Neumann, Klaus; Morlock, Martin: Operations Research. Hanser, München, Wien 1993

Popper, Karl R.: Über Wolken und Uhren. Aus: Objektive Erkenntnis – Ein evolutionärer Entwurf. Hamburg 1973, S. 230-282

[1] http://www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/Bienenwabe.pdf

Price, Kenneth V.; Storn, Rainer M.; Lampinen, Jouni A.: Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. Springer, Berlin, Heidelberg 2005

Rechenberg, Ingo: Evolutionsstrategie. Optimierung technischer System nach den Prinzipien der biologischen Evolution. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart-Bad Cannstatt 1973

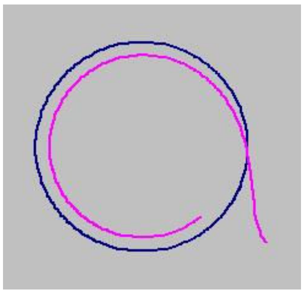
Verbindungen

www.hs-fulda.de/~grams/Heuristik/Heuristik.htm
www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/Problemloesen.htm
www.hs-fulda.de/~grams/Problemloesen/ProblemloesenBegleitmaterial2010.pdf

Aufgaben- und Problemstellungen

Übungen

Fahrradartistik



Der ein Meter achtzig große Artist steigt aufs Fahrrad und durchfährt einen nahezu perfekten Kreis. Die Reifenspuren zeichnen sich im weichen Boden ab und ergeben das nebenstehende Bild. Wie groß ist der Durchmesser des durchfahrenen Kreises etwa?

Zahlengymnastik zum Aufwärmen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Quadrat einer beliebigen ganzen Zahl lässt sich mit ganzzahligem k in der Form $8k+1$ oder $4k$ darstellen.
2. Jede mit einer natürlichen Zahl n gebildete natürliche Zahl n^3-n ist durch 3 teilbar.
3. Wenn $x + 1/x$ ganzzahlig ist, dann auch $x^n + 1/x^n$,
4. Aus den pythagoreischen Tripeln (a, b, c) und (A, B, C) lässt sich durch geeignete Kombination der Werte ein weiteres pythagoreisches Tripel (x, y, z) gewinnen. *Erläuterung:* Ein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) heißt pythagoreisch, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist. Beispiele sind (3, 4, 5) und (5, 12, 13).

Begrüßung

Auf einer Party mit n Personen geben sich manche zur Begrüßung die Hand. Zeigen Sie, dass es zwei Personen geben muss, die gleich viele Hände geschüttelt haben.

Kuchen teilen

Gegeben ist ein kreisrunder Kuchen. Auf dem Rand des Kuchens sind n Punkte ausgewählt. Zwischen je zwei Punkten wird ein gerader Schnitt gemacht. Angenommen wird, dass kein Punkt des Kuchens von mehr als zwei Schnitten getroffen wird. Jeder Kreuzungspunkt von Schnitten gehört also zu genau zwei Schnitten. Wie groß ist die Zahl der Kuchenstücke?

Flussüberquerung

Drei Ehepaare wollen über den Fluss. Sie finden ein herrenloses Boot, das aber höchstens zwei Personen tragen kann. Alle sechs Personen können rudern. Das Problem ist, dass die Männer sehr eifersüchtig sind. Wenn sie sich von ihrer Gattin trennen, darf kein anderer Mann in ihrer Gesellschaft sein. Können die sechs unter dieser Bedingung auf die andere Seite kommen?

Fehlerschätzung

Im Manuskript eines Buches fand der Herausgeber 50 formale Fehler (Schreibfehler und dergleichen). Unabhängig davon entdeckte der Autor beim Korrekturlesen 110 Fehler, darunter 22, die bereits der Herausgeber entdeckt hatte. Damit waren insgesamt also 110+50-22 = 138 Fehler bekannt. Auf Basis dieser Daten schätzte der Autor ab, wie viele Fehler nach der Berichtigung im Buch wohl noch verbleiben würden. Daraufhin wurde eine dritte Person für das Korrekturlesen gewonnen. Anreiz war eine Belohnung von (umgerechnet) 1 € je gefundenen Fehler. So wurden 50 weitere Fehler gefunden. Nach Korrektur aller erkannten Fehler ging das Buch in Druck. Wie viele formale Fehler wird das Buch nach Drucklegung wohl noch enthalten haben?

Zufällige Bitfolgen

Al und Brit werfen mehrmals eine Münze und schließen eine Wette auf die Folge der Ergebnisse ab: Al legt sich auf eine Folge von drei Ereignissen fest, beispielsweise Zahl, Zahl, Zahl, und Brit wählt daraufhin eine beliebige andere Dreierfolge. Wessen Folge im Spielverlauf zuerst auftritt, der bekommt die Münze. Ist das ein faires Spiel? Formulieren Sie eine stichhaltige Begründung Ihrer Antwort.

Windige Würfel

Sie werden von Ihrem Freund zu einem Würfelspiel eingeladen. Er lässt Ihnen den Vortritt und bietet Ihnen an, einen von drei Würfeln auszuwählen. Er will sich dann einen von den übrigen nehmen. Die Auswahl ist nicht trivial, denn die Augenzahlen sind etwas sonderbar: Einer der Würfel hat zwei Dreien, zwei Vieren und zwei Achten, der zweite hat zwei Einsen, zwei Fünfen und zwei Neunen, und der dritte zwei Zweien, zwei Sechsen und zwei Siebenen. Welcher der Würfel bietet Ihnen die besten Chancen, eine höhere Punktzahl zu erwürfeln als Ihr Freund? Klugerweise nehmen Sie an, dass Ihr Freund aus den verbleibenden Würfeln den für ihn günstigsten auswählt.

Wettchancen

Zwei gleich starke Schachspieler A und B treten in einem Wettkampf gegeneinander an. Gewinner ist, wer als erster sechs Partien gewonnen hat. Solange der Sieger noch nicht feststeht, können Wetten abgeschlossen werden. Zur Festsetzung der Wettchancen (Chancenverhältnis, englisch: Odds) ist vorab zu jedem möglichen Spielstand die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Spielers A zu ermitteln. Stellen Sie eine solche Tabelle auf.

Aufzugsparadoxon

Das Gebäude hat mehrere Aufzüge, die unabhängig voneinander fahren. Hochheim arbeitet in einem Büro in einer der oberen Etagen. Er ärgert sich oft darüber, dass nach Dienstschluss der erste Aufzug, der in seinem Stock hält, nach oben fährt. „Die stellen die Aufzüge wohl im Keller her und holen sie dann auf dem Dach mit dem Helikopter ab“, bemerkt er sarkastisch. Ganz anders geht es dem Fräulein Tiefenhuber, sie arbeitet in einem der unteren Etagen. Wenn sie zum Mittagessen in das Dachrestaurant will, hält meist zuerst ein Aufzug, der nach unten geht. Neulich trafen sich die beiden und erzählten einander von dem verflixten Aufzug. Sie fanden die Angelegenheit ziemlich paradox. Wie lässt sich der Widerspruch aufklären?

Ulmer Schachteln

Ein Ulmer Kaufmann will 30 Teile von insgesamt etwa 15 000 Pfund nach Wien bringen. Und das sind die Gewichte der Teile in Pfund:

```
343  81  59 472 167 911 900 924 298 545 678 813 162 168 699
638 917 321 609 670 232 724 712 541 427 897 281 487 593 265
```

Das zurzeit (um 1750) übliche Transportmittel ist die Wiener Zille (Ulmer Schachtel), ein einfaches Holzboot zum einmaligen Gebrauch. Regelmäßig gehen diese Boote von Ulm nach Wien, wo sie als Brennholz verkauft werden. Der Kaufmann beschießt, sich eine Zille bauen zu lassen, die maximal 12 000 Pfund befördern kann. Um die Transportkosten niedrig zu halten, möchte er möglichst viel seiner Ladung auf dem eigenen Boot unterbringen. Welche Auswahl soll er treffen?

Projekte

Die Aufgabenstellungen sind als Anregungen zu verstehen. Im Pflichtenblatt ist jeweils die konkrete Aufgabe zu formulieren. Dabei sollte der Rahmen nicht zu eng gesteckt werden. Insbesondere sind die Eingabedaten geeignet zu verallgemeinern, so dass sich leicht prüfbare Sonderfälle darstellen lassen und dass Leistungsgrenzen des Programms ausgelotet werden können.

Minimierung nichtlinearer Funktionen

Gleichmäßige Approximation: Gesucht ist ein Polynom n-ten Grades

$$P(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

das eine vorgegebene Funktion g über dem Intervall $[a, b]$ im Sinne der Maximumnorm möglichst genau nachbildet. Anders ausgedrückt: Es sind Parameter a_0, a_1, …, a_n gesucht derart, dass die Funktion

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \max_{a\le x\le b}(|\, g(x) - P(x)\,|) = \max_{a\le x\le b}(|\, g(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\,|)$$

ihren minimalen Wert annimmt. Wählen Sie als Beispiel die Funktion $g(x) = \sin(x)/x$ im Interval $[0, \pi]$. Stellen Sie die Funktion, die Approximation und den Approximationsfehler für $n = 5$ grafisch dar. Zeigen Sie, inwieweit $x\cdot g(x)$ eine gute Approximation an $\sin(x)$ ist.

Perlenkette. Fünf Kugeln der Masse 1 g sind zu einer „Perlenkette“ miteinander verbunden. Der Elastizitätsbeiwert E der Verbindungsfäden oder –gummis ist gleich 0.5 N. Ein Wert für Kautschuk bei einer Querschnittsfläche von einem Quadratmillimeter[2]. Die Fäden haben im ungespannten Zustand die Länge 5 cm. Über weitere zwei dieser Fäden ist die Kette an der Zimmerdecke befestigt. Der Abstand der Befestigungspunkte ist $a = 20$ cm. Zulässige Annahmen: punktförmige Kugeln und masselose Verbindungsfäden. Gesucht sind die Lage der Kugeln im Raum sowie die Werte für die relative Dehnung der Fäden. Lösen Sie die Aufgabe durch Minimierung der Potentialenergie aufgrund des Schwerefelds und Fadendehnung.

---

[2] Nach dem *Hookeschen Gesetz* ist Zugspannung = Zugkraft/Querschnittsfläche = Elastizitätsmodul mal relative Längenänderung. In Formelzeichen: $\sigma = F/A = E\cdot\Delta l/l$. Hier wird die Querschnittsfläche in den Elastizitätsmodul eingerechnet, so dass sich die vereinfachte Formel $F = E\cdot\Delta l/l$ ergibt. Wegen dieser Bedeutungsänderung nenne ich die Konstanten auch Elastizitätsbeiwert und nicht Elastizitätsmodul.

Ein Rucksackproblem

In der Zahl **5474504745** steckt eine Nachricht. Wir wissen, dass es sich um das Ergebnis einer Verschlüsselung handelt und wir wissen auch, wie die Verschlüsselung[3] zustande gekommen ist; wir kennen also den *öffentlichen Schlüssel*. Das Entschlüsselungsverfahren, der *private Schlüssel*, ist uns unbekannt. Ziel ist die Rekonstruktion der ursprünglichen Nachricht auf Grundlage der verfügbaren Information.

Und so funktioniert das Verschlüsselungsverfahren: Die ursprüngliche Nachricht ist eine Folge aus vier Zeichen. Jedes der vier Zeichen wird mittels ASCII-Codetabelle als 7-Bitfolge codiert. Die Verkettung dieser Zeichen liefert eine 28-Bitfolge. Aus der Zeichenkette „Zeus“ wird so beispielsweise die Bitfolge „1011010110010111101011110011“.

Das Verschlüsselungsverfahren erzeugt aus einer beliebigen 28-Bitfolge eine Dezimalzahl nach folgender Vorschrift. Gegeben ist der öffentliche Schlüssel, ein Folge von 28 Dezimalzahlen:

37037034	61728390	111111102	222222204	444444408	286476829	585299336
543495329	472232993	342053999	57004655	126354988	228018620	468382918
322008171	16912999	58517354	92343352	197032382	406410442	185717541
371435082	140458177	268570676	549487030	459525039	304292413	6172839

Jeder dieser Zahlen wird – in aufsteigender Folge – ein Bit der zu verschlüsselnden Nachricht zugeordnet. Dann werden alle Zahlen addiert, denen eine 1 zugeordnet ist. Im Falle unseres „Zeus“-Beispiels ergibt sich die Zahl 4138431031.

Unsere Aufgabe ist nun, eine Bitfolge (sowie die zugehörigen ursprünglichen Zeichen) zu finden derart, dass sich mit diesem Verfahren die zu Beginn genannte Summe ergibt.

Diese Aufgabe ähnelt der Aufgabe, einen Rucksack mit verschiedenen Gegenständen, deren Gewicht oder Volumen durch die Zahlen der Tabelle gegeben sind, möglichst voll zu machen ohne die Kapazität zu überschreiten. Die verschlüsselte Nachricht steht für die Kapazität des Rucksacks und die Bitfolge sagt uns, welche Teile hineingepackt werden sollen und welche nicht.

Verallgemeinern Sie Ihr Programm so, dass auch das Problem des Ulmer Kaufmanns damit gelöst werden kann (Übung „Ulmer Schachteln“).

Das äthiopische Mahl

Zwei Freunde treffen sich in einem äthiopischen Restaurant zum Essen. Wie üblich wird dort das Essen für die beiden auf einer Platte serviert, von der sie sich bedienen können. 100 Häppchen liegen auf dem Teller. Jeder der beiden hat gewisse Vorlieben. Ein Teilchen ist für den einen ein hoher Genuss, und der andere schätzt es vielleicht nicht so sehr. Beide Freunde kennen aber nicht nur die eigenen Vorlieben, sondern auch die des Freundes.

Die Freunde geben den Häppchen von 1 bis 100 durchlaufende Punkte: 1 Punkt für das unbeliebteste und 100 Punkte für das begehrteste Häppchen. Nehmen wir an, die Häppchen seien nach aufsteigender Bewertung des einen der Freunde geordnet, dann liefert eine Bewertung dieser Aufreihung durch den anderen diese Zahlenfolge: 70 47 69 11 30 33 31 17 90 79 89 95 44 18 93 84 4 10 21 20 6 71 59 7 26 72 94 92 15 64 78 52 45 81 62 68 63 53 85 55 32 40 74 76 27 58 37 65 96 61 49 41 88 77 60 34 54 9 23 22 97 5 39 98 57 2 91 36 1 3 19 100 29 48 66 75 56 73 80 86 43 46 42 51 24 87 50 35 12 83 38 25 28 82 14 13 8 67 16 99.

---

[3] Es handelt sich um das Merkle-Hellman-Kryptosystem

Die beiden wollen nun die Häppchen so aufteilen, dass sie zusammen den größtmöglichen Genuss haben. Sie einigen sich darauf, abwechselnd zuzugreifen. Welche Strategie sollten sie dabei verfolgen? Ist es von Vorteil, jeweils das subjektiv beste Stückchen, das noch auf dem Teller liegt, zu wählen? Oder empfiehlt es sich eher, das Stückchen zu nehmen, das der Freund am wenigsten schätzt? Wie sieht die optimale Aufteilung zum Nutzen beider aus?