Lorenzkurven, Equity-Faktoren und schwarze Schwäne

Anmerkungen zu Arbeiten von Radermacher und Taleb

Timm Grams, Fulda, 15. Februar 2012 (rev. 11.09.12)

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Das Buch „The Black Swan. The impact of the highly improbable“ von Nassim Nicholas Taleb strotzt vor Übertreibungen. Das reizt zum Lesen. Aber man sollte auf der Hut sein. Auch der Aufsatz „Globalisierung. Ausgleich oder Untergang“ von Radermacher ist interessant. Aber auch hier sollte man immer im Sinn haben, dass eine komplexe Realität durch mathematische Modelle nur unzureichend abgebildet wird. In beiden Werken geht es um die Anwendung der Chaostheorie und der Fraktale auf ziemlich schwer fassbare Phänomene. Die Aufsatzreihe „Der Kult um das Chaos“ von Peter Brügge hilft, eine kritische Distanz zu den vorgebrachten „Theorien“ zu halten. In meinem Kurzbericht geht es vor allem um eine schlüssige Darstellung der mathematischen Zusammenhänge.

Lorenzkurven

Definition der Lorenzkurve

Ich stelle mir die Gesamtbevölkerung der Größe N nach wachsendem Einkommen durchnummeriert vor. Der mit der Nummer 1 ist der Ärmste und der mit der Nummer N der Reichste.

Mit $f(n)$ bezeichne ich das Gesamteinkommen der n Ärmsten der Gesamtbevölkerung, das sind die Leute mit den Nummern 1, 2, …, n. Die Variable n durchläuft Werte von 0 bis N und die Funktion $f(n)$ steigt mit n ausgehend vom Wert 0 monoton an bis zum Gesamtwert der Einkommens der Bevölkerung $f(N)$.

Nun gehen wir über ins Kontinuierliche: Mit x bezeichnen wir den relativen Anteil der n Ärmsten an der Gesamtbevölkerung

$$x = \frac{n}{N}.$$

Aus der diskreten Funktion f machen wir jetzt die kontinuierliche Funktion F, indem wir

$$F(x) = f(Nx)/f(N) = f(n)/f(N) \qquad (0)$$

setzen.

Der Graph der Funktion $F(x)$ heißt Lorenz-Kurve. $F(x)$ ist der Anteil am Gesamteinkommen der Bevölkerung, den die (anteilig) x Ärmsten haben. Dementsprechend ist 1-$F(x)$ derjenige Anteil am Gesamteinkommen, der auf die (anteilig) 1-x Reichsten entfällt

Das Einkommen des (n+1)-ten Individuums ist gleich

$$f(n+1)-f(n)=\frac{f(N)}{N}\cdot\frac{F(\frac{n+1}{N})-F(\frac{n}{N})}{\frac{1}{N}}=\frac{f(N)}{N}\cdot\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

Dabei habe ich $\Delta x = 1/N$ gesetzt. Der Differenzenquotient $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ darf hier durch den Differenzialquotienten (die Ableitung) $F'(x)$ ersetzt werden. Damit ist das Einkommen des (n+1)-ten Individuums gleich

$$f(n+1)-f(n)=\frac{f(N)}{N}\cdot F'(x)\,. \tag{1}$$

Es gibt N-n Leute, die wenigstens so reich sind wie er. Diese besitzen ein Durchschnittseinkommen von

$$\frac{f(N)-f(n)}{N-n}=\frac{f(N)}{N}\cdot\frac{1-F(x)}{1-x}\,. \tag{2}$$

Als Equity-Faktor ε bezeichnet man das Verhältnis, das sich ergibt, wenn man das Einkommen eines Individuums auf das Durchschnittseinkommen aller derjenigen bezieht, die wenigstens so reich sind wie er. Also gilt

$$\varepsilon=(f(n+1)-f(n))\cdot\frac{N-n}{f(N)-f(n)}=F'(x)\cdot\frac{1-x}{1-F(x)}\,. \tag{3}$$

Fraktale Lorenzkurven

Der Equity-Faktor (etwa: Gerechtigkeits- oder Fairness-Faktor) ist im Allgemeinen von x abhängig. Um zu einem einfachen Maß für die Verteilung der Einkommen einer Population zu kommen, setzt F. J. Radermacher diesen Faktor als von x unabhängig an. Diese Tatsache bezeichnet er in seinem Aufsatz „Globalisierung“ (Informatik-Spektrum vom 16.12.2002) als *Selbstähnlichkeit*: Der Ärmste eine Population hat ein Einkommen von einem Bruchteil ε des Durchschnittseinkommens. Lässt man eine Schicht der Geringverdiener weg, dann hat der Ärmste unter den Verbleibenden ein Einkommen, das wiederum den Bruchteil ε des Durchschnitts dieser Population ausmacht.

> Selbstähnlichkeit ist eine Vokabel aus der (inzwischen etwas aus der Mode gekommenen) Chaostheorie und deren Teilgebiet, der fraktalen Geometrie: Jeder Ausschnitt einer selbstähnlichen Figur ähnelt bei entsprechender Vergrößerung dem Gesamtobjekt. Beispiel: Küstenlinien. Im vorliegenden Fall geht es einfach darum, Ausschnitte aus der Bevölkerung zu betrachten, die dadurch definiert sind, dass die Leute ein bestimmtes Mindesteinkommen haben. Egal wie hoch ich die Grenze des Mindesteinkommens lege: Immer wieder hat der Ärmste der Gruppe ein Einkommen, das ein Bruchteil ε des Durchschnittseinkommens dieser Gruppe ist. Wie oben bereits erwähnt, ist das eine Festlegung, die möglicherweise – und genau das behauptet Radermacher – empirisch begründbar ist.

Die Formel für ε ist unter der Annahme der Selbstähnlichkeit (also der Konstanz von ε) eine Differenzialgleichung für die Lorenzkurve F. Wir formulieren diese Gleichung so um, dass sich die linke und die rechte Seite der Gleichung einfach integrieren lassen:

$$\frac{\varepsilon}{1-x} = \frac{F'(x)}{1-F(x)}. \tag{4}$$

Integrieren über die linke und die rechte Seite ergibt $\varepsilon \cdot \ln(1\text{-}x) = \ln(1\text{-}F(x))$. Auflösung nach F liefert die vom Parameter ε abhängige Formel für die Lorenzkurve (Kurvenschar):

$$F(x) = 1-(1-x)^{\varepsilon} \tag{5}$$

Offensichtlich liegen die Werte der Equity-Faktoren im Intervall (0, 1]. Für sehr kleine ε ist die Ungleichverteilung der Einkommen am größten und für $\varepsilon = 1$ verdienen alle dasselbe[1].

Die Formel gerät etwas kompakter, wenn man anstelle von den Ärmsten einer Bevölkerung von den Reichsten ausgeht. Wenn wir die Bevölkerung nach dem Einkommen so auf zwei Teile aufteilen, dass die Ärmeren den Anteil x ausmachen, dann ist der Anteil der Reicheren gleich v =1-x. Diese Top v haben am Gesamteinkommen den Anteil w = 1-F(x). Die Größe des Anteils w =1-F(x) der Top v ist folglich gleich.

$$w = v^{\varepsilon}. \tag{6}$$

Das ist die Formel, die der Tabelle 3 auf Seite 265 des Buches von Taleb zugrunde liegt. Taleb nennt die auf der Selbstähnlichkeit basierenden Kurven *fraktal*. Dem Sparchgebrauch schließe ich mich an.

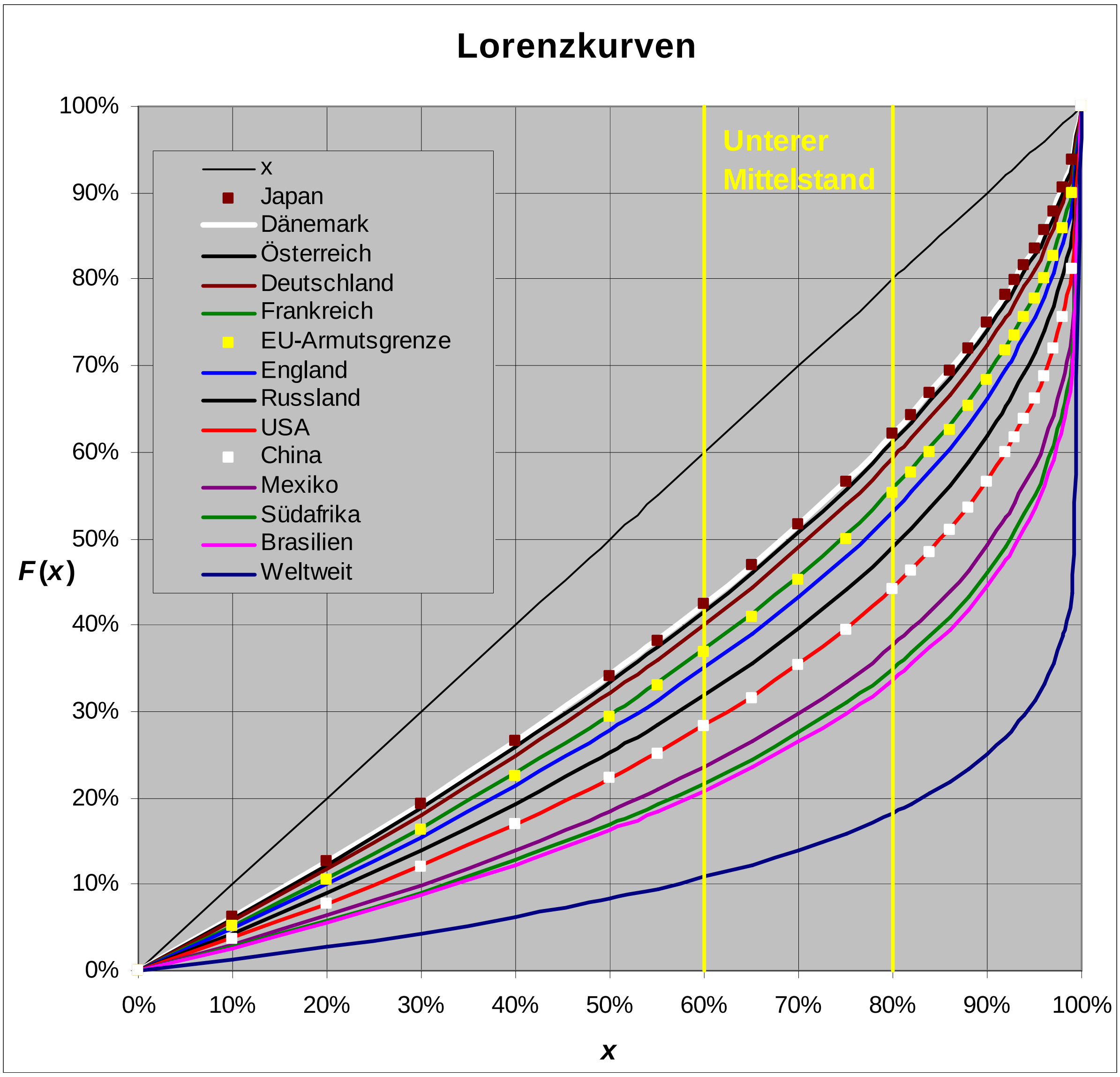
Im Aufsatz „A Computational Concept for Normative Equity" beschreiben Kämpke, Pestel und Radermacher (2003) wie sie die fraktalen Lorenzkurven an tatsächliche Daten der Einkommensverteilung einer Bevölkerung anpassen. Und sie machen auch klar, dass diese Anpassung kein zwingender Prozess mit eindeutigem Ergebnisse ist: Je nach Anpassungsverfahren ergeben sich für dieselben Daten im Allgemeinen verschiedene Equity-Faktoren und damit auch verschiedene Lorenzkurven.

[1] Der ehemalige Bundeskanzler Gerhard Schröder hat mit der Agenda 2010 offenbar in Kauf genommen, dass der bundesrepublikanischen Equity-Faktor absinkt: Größere Einkommensdifferenzen der Bevölkerung bei gleichzeitiger Stärkung der Wettbewerbsfähigkeit im internationalen Vergleich („Leistung muss sich lohnen"). An diesem Beispiel wird deutlich, vor welchem prinzipiellen Dilemma die Wirtschaftspolitik steht. Es ist den Armen schwer klarzumachen, dass sie sogar bei wachsender Ungleichheit Gewinner sein können.

Fraktale Lorenzkurven für einige Länder

Dem Abschnitt folgen eine Tabelle der Equity-Faktoren einiger Länder und die Grafik der zugehörigen Lorenzkurven (Auswahl). Die Daten für China, USA, Österreich und Deutschland sind aus dem Jahr 2007, die anderen sind älter (Quelle: Wikipedia, 25.02.2012, 8:04). Die Schätzung des Equity-Faktors weltweit ist dem Informatik-Spektrum-Artikel von Radermacher (2002) entnommen.

Weltweit	Brasilien	Südafrika	Mexiko	Russland	China	USA	EU-Armutsgrenze	England	Frankreich	Deutschland	Nordeuropa	Japan	Österreich
12.50%	25.55%	26.74%	29.37%	41.84%	36.15%	36.43%	50.00%	47.06%	50.72%	55.88%	60.38%	60.13%	58.73%



Lorenzkurve und Einkommensverteilung

Der Zusammenhang zwischen Lorenzkurve und Verteilungsfunktion

Das Gesamteinkommen der anteilig x Ärmsten der Population ist gleich $f(N)\cdot F(x)$ und das Einkommen y des *Grenzindividuums,* also desjenigen Individuums, das unter den $1-x$ reicheren das geringste Einkommen hat, ist gemäß Gleichung (1) gleich

$$y = a \cdot F'(x)\,. \tag{7}$$

In dieser Formel bezeichnet a das über die Gesamtpopulation gemittelte Einkommen:

$$a = \frac{f(N)}{N}\,.$$

Die Formel (7) lässt sich auch im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsaussage lesen: x ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Einkommen eines beliebig aus der Population herausgegriffenen Individuums kleiner als y ist.

Sei F'^{-1} die Umkehrfunktion von F': $F'^{-1}(F'(x)) = x$ für $x \in [0, 1]$. Damit lässt sich Gleichung (7) in die Gestalt $x = F'^{-1}(\frac{y}{a})$ bringen. Die durch

$$G(y) = F'^{-1}(\frac{y}{a}) = x \tag{8}$$

definierte Funktion G ist offensichtlich die *Verteilungsfunktion des Einkommens*. Über Gleichung (8) lässt sich die Verteilungsfunktion G aus der Lorenzkurve F bestimmen. Wenn nun die Verteilungsfunktion des Einkommens gegeben ist, dann erhält man daraus die Lorenzkurve folgendermaßen: Mit der Umkehrfunktion G^{-1} zur Verteilungsfunktion G wird Gleichung (8) zu $y = G^{-1}(x)$. Der Vergleich mit (7) zeigt, dass

$$F'(x) = \frac{1}{a} G^{-1}(x)\,.$$

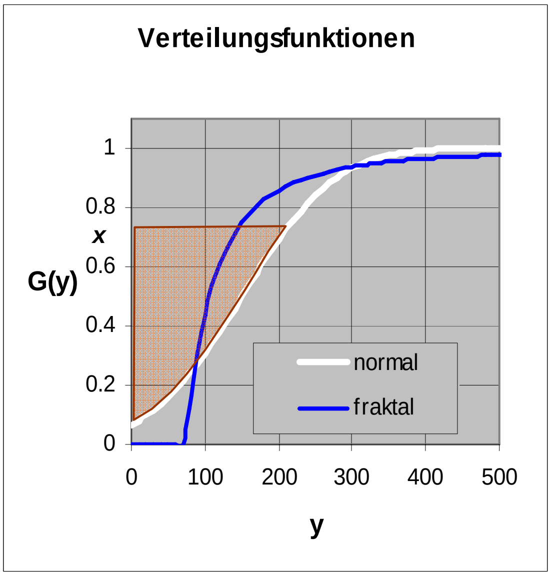
Sei $H(x)$ das Integral über $G(x)$:

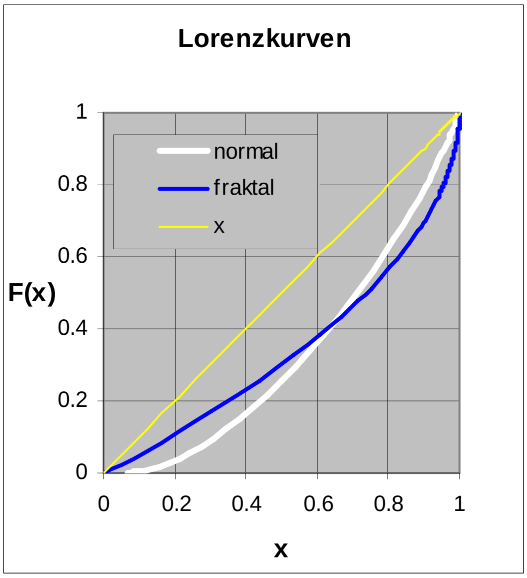
$$H(x) = \int_0^x G^{-1}(x)\mathrm{d}x\,.$$

Dann ergibt sich die Lorenzkurve zu $F(x) = \frac{H(x)}{a}$. Wegen $F(1) = 1$ ist $a = H(1)$. Wir erhalten schließlich:

$$F(x) = \frac{H(x)}{H(1)} = \frac{\int_0^x G^{-1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 G^{-1}(x)\mathrm{d}x}\,. \tag{9}$$

Die folgenden Grafiken zeigen beispielhaft die Verteilungsfunktionen und Lorenzkurven für normalverteilte Einkommen einerseits und für eine fraktal Einkommensverteilung andererseits. Zur Veranschaulichung des Integrals über der Umkehrfunktion: Der Flächeninhalt der markierten (nahezu dreieckförmige) Figur der linken Grafik entspricht dem Wert des Integrals $\int_0^x G^{-1}(x)\mathrm{d}x$ für den Fall der Normalverteilung.





Die fraktale Verteilungsfunktion

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen der Lorenzkurve und den Relationen in Kapitel 16 „The Aesthetics of randomness“ des Buches von Taleb hergestellt (S. 262 ff.). Ich bleibe beim Beispiel der Einkommensverteilung. Taleb überträgt das Modell auf viele andere Bereiche: Worthäufigkeiten, Buchverkäufe, Erdbeben, Einwohnerzahlen, …

Taleb fragt nach dem Anteil von Individuen (Personen) an der Gesamtheit (Bevölkerung), deren Wert (Einkommen) mindestens gleich einem bestimmten Grenzwert y ist. Bei gegebener Lorenzkurve $F(x) = 1-(1-x)^{\varepsilon}$ erhalten wir die Antwort mithilfe der zugehörigen Verteilungsfunktion (8)

$$G(y) = F'^{-1}(\frac{y}{a}) = 1-\left(\frac{a\varepsilon}{y}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1-\left(\frac{a\varepsilon}{y}\right)^{\alpha}$$

Wobei der Exponent α und der Equity-Faktor ε folgendermaßen voneinander abhängen:

$$\alpha = \frac{1}{1-\varepsilon} \text{ bzw. } \varepsilon = 1-\frac{1}{\alpha}.$$

Die Armutsgrenze für eine Volkswirtschaft wird von der Europäischen Union auf $\varepsilon = 1/2$ festgelegt. Dazu gehört ein Exponent von $\alpha = 2$.

Der Wert $x = G(y)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig aus der Population herausgegriffenes Individuum eine Einkommen hat, das geringer als y ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Einkommen wenigstens gleich y ist, muss dann gleich $1-x = \left(\frac{a\varepsilon}{y}\right)^{\alpha}$ sein.

Das ist die Antwort auf Talebs Frage.

Nehmen wir als Zahlenbeispiel in etwa die Verhältnisse der Bundesrepublik Deutschland mit einem Equity-Faktor von ε = 60%. Wir gehen von einem durchschnittlichen Haushaltseinkommen von a = 35 000 € pro Jahr aus. Wir fragen nach der Zahl der Einkommensmillionäre und setzten $y = {}_{10}6$ €. Daraus ergibt sich der Wert 1-x =0.0000639. Unter den etwa 40 Mio. Haushalten gehören also ca. 2 500 zu den Einkommensmillionären. (Die amtlichen Zahlen lassen darauf schließen, dass einer unter 5000 Bundesbürgern Einkommensmillionär ist. Das entspräche sogar etwa 8 000 Haushaltungen mit einem Millioneneinkommen.)

Welcher Populationsanteil hat weniger als das Durchschnittseinkommen?

Der Populationsanteil *x,* dessen Individuen weniger als das Durchschnittseinkommen *a* haben, ergibt sich aus Gleichung (8), wenn man dort $y = a$ setzt:

$$x = F'^{-1}(1)\,.$$

Im Falle der fraktalen (selbstähnlichen) Einkommensverteilung erhalten wir die folgenden Zusammenhänge: Einsetzen der Gleichung (5) liefert $F'(x) = \varepsilon/(1-x)^{1-\varepsilon} = 1$ bzw.

$$x = 1 - \varepsilon^{1/(1-\varepsilon)}\,.$$

Daraus folgt: x ist der Bevölkerungsbruchteil, dessen Einkommen höchstens gleich dem Gesamtdurchschnittseinkommen ist. Das Gesamteinkommen der Bevölkerungsschicht, deren Einkommen unter dem Durchschnittseinkommen *a* liegt, ist gleich

$$F(x) = 1-(1-x)^{\varepsilon} = 1-\varepsilon^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}\,.$$

Fraktale Verteilung kontra Normalverteilung

Die fraktale Verteilung

Aus (5) erhalten wir

$$F'(x) = \varepsilon/(1-x)^{1-\varepsilon}$$

und daraus die Umkehrfunktion

$$F'^{-1}(z) = 1-\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\alpha} \quad \text{für } z \in [\varepsilon, \infty).$$

Gleichung (8) liefert die Verteilungsfunktion des Einkommens:

$$G(y) = 1-\left(\frac{\varepsilon \cdot a}{y}\right)^{\alpha} \quad \text{für } z \in [\varepsilon a, \infty).$$

Die *Verteilungsdichte des Einkommens y* ist demnach gleich

$$g(y) = \frac{\alpha \cdot (\varepsilon \cdot a)^{\alpha}}{y^{\alpha+1}} \quad \text{für } z \in [\varepsilon a, \infty). \tag{10}$$

Unterhalb des Wertes εa sind die Verteilungsfunktion und die Verteilungsdichte gleich 0.

Die Verteilungsdichte der Einkommen einer Volkswirtschaft mit fraktaler Verteilung ist also Proportional zu $1/y^{\beta}$, mit einer Zahl $\beta > 2$.

Nehmen wir einmal zwei beliebig herausgegriffene Individuen, deren Einkommen y_1, und y_2 zusammen den Wert z ergibt: $z = y_1 + y_2$. Wir halten z konstant und fragen, welcher Wert für y_1 am wahrscheinlichsten ist. (Der Wert für das wahrscheinlichste y_2 ergibt sich dann aus der Formel $y_2 = z - y_1$.)

Die Wahrscheinlichkeit ist proportional zu $(1/y_1^\beta)\cdot(1/y_2^\beta) = 1/(y_1\cdot(z-y_1))^\beta$. Da y_1 und y_2 nicht kleiner als εa werden können, muss y_1 im Intervall $[\varepsilon a, z - \varepsilon a]$ liegen. Die Maxima werden an den Rändern des Intervalls angenommen. Das heißt:

> Bei fraktaler Einkommensverteilung und bei gegebener Summe zweier Einkommen ist es am wahrscheinlichsten, dass das eine der Einkommen minimal und das andere maximal ist.

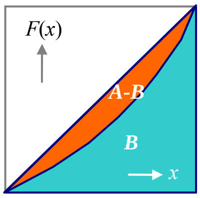
Dieser Fall wird im Black Swan von Taleb auf Seite 235 angesprochen.

Die Normalverteilung

Wäre die Einkommen normalverteilt mit irgendeinem beliebigen Mittelwert μ und einer beliebigen Standardabweichung σ, hätte sich auf jeden Fall als wahrscheinlichster Fall ergeben, dass beide ein gleich großes Einkommen in der Intervallmitte besitzen: $y_1 = y_2 = z/2$. Die fraktale Verteilung herrscht – so Taleb – in Extremistan und die Normalverteilung in Mediocristan.

Der Gini-Index

Sei A die Fläche unterhalb der Kurve $F(x) = x$ bis hin zur x-Achse. Das ist die maximal erreichbare Flächengröße. Sie wird nur bei vollständig gleicher Verteilung der Einkommen erreicht und hat den Wert 1/2. Sei nun B die Fläche unterhalb der Lorenzkurve $F(x)$, die eine nicht so ideale Einkommensverteilung beschreibt. Das Verhältnis $(A-B)/A$ kann als Maß für die ungleiche Verteilung der Einkommen gelten und wird Gini-Index genannt. Ich benenne den Gini-Index mit γ und setze



$$\gamma = (A-B)/A.$$

Der Gini-Index ist nicht nur für fraktale Verteilungen definiert. Für den Fall der fraktalen Verteilung ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Gini-Index und dem Equity-Faktor ε:

$$\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \text{ und } \varepsilon = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Der Gini-Index bietet eine einfache Methode zur Anpassung der fraktalen Lorenzkurve an gegebene Daten: Man ermittelt aus den Daten den Gini-Index und daraus über die obige Formel den Equity-Faktor der fraktalen Lorenzkurve. Diese Methode wird von Radermacher und seinen Mitstreitern nicht empfohlen. Sie bevorzugen die Methode der Regression. Klar ist, dass in der Methodenwahl ein gutes Stück Willkür steckt.

Literaturhinweise

Brügge, Peter: Mythos aus dem Computer (Über Ausbreitung und Missbrauch der „Chaostheorie“, Teil 1). Der Spiegel 39/1993, S. 156-164. Der Kult um das Chaos (Über Ausbreitung und Missbrauch einer neuen Welterklärung, Teil 2). Der Spiegel 40/1993, S. 232-241. Der Kult um das Chaos (Über Ausbreitung und Missbrauch einer neuen Welterklärung, Teil 3). Der Spiegel 41/1993, S. 240-252.

Kämpke, T.; Pestel, R.; Radermacher, F. J.: A Computational Concept for Normative Equity. European Journal of Law and Economics 15 (2003), pp. 129-163

Lorenz:, M. O.: Methods of Measuring the Concentration of Wealth. Publications of the American Statistical Association. Boston 1905 Vol. IX. New Series.

Neubäumer, R.; Hewel, B.: Volkswirtschaftslehre. Grundlage der Volkswirtschaftstheorie und der Volkswirtschaftspolitik. 2. Aufl. Gabler, Wiesbaden 1998 (Teil B: Die Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung der Bundesrepublik Deutschland)

Paulsen, Andreas: Allgemeine Volkswirtschaftslehre I. Grundlegung, Wirtschaftskreislauf. DeGruyter, Berlin 1970 (S. 60 ff.)

Radermacher, F. J.: Globalisierung. Ausgleich oder Untergang? Informatik Spektrum 25 (Dezember 2002) 6, 411-426

Taleb, Nassim Nicholas: The Black Swan. The Impact of the highly improbable. 2007