

Das Drei-Türen-Problem (Ziegenproblem) bei undurchsichtigem Gastgeber

[Timm Grams](#), Fulda, 22. August 2012 (rev.: 01.10.2012)

Eine Denksportaufgabe

Große Fernsehshow. Der Supergewinn verbirgt sich hinter einer von drei Türen. Der Kandidat trifft seine Wahl. Die Tür wird jedoch zunächst nicht geöffnet. Der Showmaster öffnet eine der beiden anderen Türen, wohl wissend, dass dahinter eine Ziege als lebende Niete angepflockt ist. Der Showmaster stellt dem Kandidaten nun frei, bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben oder die dritte der Türen zu öffnen. Soll er, oder soll er nicht?

Lösung. Es lohnt sich, zu wechseln. Durch den Wechsel verdoppelt sich die Gewinnwahrscheinlichkeit von $1/3$ auf $2/3$. Und so lässt sich diese *Zwei-Drittel-Lösung* begründen: Hinter der vom Kandidaten gewählten Tür steckt der Hauptgewinn mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$. Mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$ steckt der Hauptgewinn hinter einer der beiden anderen Türen. An diesen Wahrscheinlichkeiten ändert sich durch die Offenbarung einer Niete durch den – voraussetzungsgemäß gut informierten – Showmaster gar nichts. Der Showmaster liefert Information. Und diese kann der Kandidat nutzen.

Der Fifty-fifty-Irrtum (naive Version). Die weitaus meisten der Befragten (erfahrungsgemäß so um die 99%) meinen allerdings, dass es sich nicht lohnt, neu zu wählen. Sie kommen zum Schluss, dass es egal ist, was man macht. Dieser populäre Fifty-fifty-Irrtum beruht auf einer falschen Anwendung des *Indifferenzprinzips* („Wenn keine Gründe dafür bekannt sind, um eines von verschiedenen möglichen Ereignissen zu begünstigen, dann sind die Ereignisse als gleich wahrscheinlich anzusehen“, John Maynard Keynes). Anstatt es korrekterweise nur auf die Ausgangssituation anzuwenden, wird das Prinzip fälschlich auch auf die durch den Showmaster veränderte Situation übertragen.

Der Fifty-fifty-Irrtum (elaborierte Version). Der Einwand geht dahin, dass man ja über die Absichten des Showmasters gar nichts weiß. Ist der Showmaster böswillig und er will den Kandidaten reinlegen, dann macht er sein Angebot nur, wenn der Kandidat mit seiner Wahl schon richtig gelegen hat. Der wohlwollende Showmaster hingegen wird sein Angebot dann unterbreiten, wenn der Kandidat zunächst auf eine Niete getippt hat. Der zum Wechsel bereite Spieler hat beim böswilligen Showmaster keine Chance, den Gewinn zu erhaschen, beim wohlwollenden erhält er ihn mit hundertprozentiger Sicherheit.

Der Verteidiger der Fifty-fifty-Lösung behauptet nun: „Wer nichts über die Strategie des Showmasters weiß, liegt mit der These richtig, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für die beiden verbleibenden Türen jeweils $1/2$ ist.“ Die Begründung geht so: Der Kandidat weiß nicht, ob er es mit einem böswilligen, einem wohlwollenden oder einem fairen Showmaster zu tun hat: „Es bleibt nur der Münzwurf: so erwischt der Kandidat – unabhängig vom Verhalten des Moderators! – mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ die richtige Tür. Jegliche Bevorzugung einer bestimmten Tür würde dagegen seine Chance im schlimmsten Fall verringern.“

Der Kandidat hat im Falle des Angebots also eine Gewinnchance von fünfzig Prozent, unabhängig von den Absichten des Showmasters.

Kritik der elaborierten Fifty-fifty-Lösung

In der Denksportaufgabe war nicht gefragt, ob der Kandidat im Falle des Wechselangebots eine Fifty-fifty-Chance auf den Gewinn wahren kann. Nein, es war gefragt, ob ein Wechsel günstiger ist oder nicht. Der Münzwurf ist letztlich nur ein verzweifelter Ausweg für den Fall, dass der Kandidat tatsächlich keine Antwort auf die gestellte Frage hat. Der Kandidat verzich-

tet in diesem Fall einfach auf die Antwort und überlässt die Entscheidung dem Zufall. Auf die Frage, ob ein Wechsel von Vorteil ist, gibt es beim Verzicht auf die Annahme eines fairen Showmasters tatsächlich keine schlüssige Antwort.

Unter einem fairen Showmaster wird hier einer verstanden, der sein Angebot unabhängig von der ersten Wahl des Kandidaten macht. Das kann der Showmaster erreichen, indem er bereits vor der Show entscheidet, ob er den Wechsel anbietet oder nicht.

Welche Entscheidungshilfe bietet die Mathematik?

Im Falle eines undurchsichtigen Showmasters, also eines Showmaster, bei dem man nicht erkennen kann, ob er böswillig, wohlwollend oder fair ist, könnte man auf die Idee kommen, dass es keine Rolle spielt, ob der Kandidat wechselt oder nicht und dass die Gewinnchancen bei beiden der zur Wahl stehenden Türen gleich sind. Dagegen spricht, dass es Gründe dafür gibt, die Türen nicht als gleichwertig anzusehen, denn eine davon ist als erste Wahl des Kandidaten gegenüber der anderen Tür ausgezeichnet. Wenn man nichts über das Verhalten des Showmasters weiß, weiß man auch nichts über die Gewinnchancen, die mit der Entscheidung des Kandidaten verbunden sind.

Man muss, will man überhaupt etwas über die Gewinnchancen aussagen, gewisse Annahmen über das Verhalten des Gastgebers machen. Ich probier's mal so: Mit p bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit, dass der Gastgeber böswillig, und mit q die Wahrscheinlichkeit, dass er wohlwollend ist. Mit der Wahrscheinlichkeit $1-p-q$ haben wir es mit einem fairen Showmaster zu tun. Von vornherein ist klar, dass der nicht wechselwillige Kandidat eine Trefferwahrscheinlichkeit von $1/3$ hat, und diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig vom Verhalten des Gastgebers.

Ein Wechsel ist nur dann interessant, wenn dadurch diese Trefferwahrscheinlichkeit übertroffen wird. Die Trefferwahrscheinlichkeit des Wechselwilligen beträgt

$$\begin{aligned} P &= q + (1-p-q) \cdot 2/3 \\ &= (2+q-2p)/3. \end{aligned}$$

Der Grenzfall liegt vor, wenn $P = 1/3$. Das heißt: Für

$$q = 2p - 1$$

ist es egal, ob der Kandidat wechselt oder nicht. Für alle größeren q lohnt ein Wechsel. (Natürlich kann q nie größer werden als $1-p$.)

Ein Blick auf die Grafik zeigt, dass die Fläche derjenigen (p, q) -Kombinationen, die für den Wechselwilligen vorteilhaft sind (+), fünfmal größer als die Fläche ist, bei der der Beharrende im Vorteil ist (-). Nur bei den durch die blaue Linie markierten Grenzfällen ist es egal, ob man wechselt oder nicht. Kurz: Praktisch niemals stehen die Chancen fifty-fifty.

Diese mathematische Spielerei besagt wenig. Sie zeigt nur, dass der Fifty-fifty-Irrtum sowohl in der naiven als auch in der elaborierten Version auf eine falsche Anwendung des Indifferenzprinzips zurückgeht.

