# 1654: Ein neues Denken beginnt

**Timm Grams, Fulda, 11. April 2014 (rev. 24.04.18)**

### Inhaltsverzeichnis

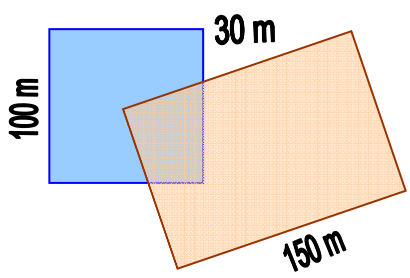


*Da steh' ich nun, ich armer Tor,*
*Und bin so klug als wie zuvor!*
*Heiße Magister, heiße Doktor gar,*
*Und ziehe schon an die zehen Jahr'*
*Herauf, herab und quer und krumm*
*Meine Schüler an der Nase herum -*
*Und sehe, daß wir nichts wissen können!*
*Das will mir schier das Herz verbrennen.*

*Johann Wolfgang von Goethe*
*(Aus dem Faust-Monolog)*

## Zur Einstimmung

Mit einer kleinen Denksportaufgabe will ich an Gebiete der antiken Mathematik erinnern: das Rechnen mit rationalen Zahlen und die Geometrie.

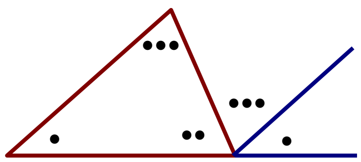



*Claims.* Der Goldgräber Lem vom Klondyke hat Schwierigkeiten. Bei Vermessungsarbeiten ist etwas schief gegangen. Toms benachbarte Parzelle und Lems eigene überlappen sich schräg. Eine Ecke von Toms größerer rechteckiger Parzelle liegt genau im Zentrum der Parzelle Lems, die einen quadratischen Zuschnitt hat. Eben ist Lem auf eine viel versprechende Goldader gestoßen. Zur Umgehung eines längeren Rechtsstreits hat er mit Tom vereinbart, dass er einen Anteil bekommt. Dieser Anteil berechnet sich aus der Hälfte der Überlappungsfläche bezogen auf die gesamte Parzelle Lems. Wie groß ist dieser Anteil?

### *Ordnung*

Welche Rolle kommt der Mathematik zu in unserem Streben nach Welterkenntnis? Die Mathematik scheint etwas zu bieten, nach dem wir alle streben: Sicherheit der Erkenntnis. Mathematische Sätze wie der, dass die Winkelsumme eines Dreiecks stets 180° beträgt, bleiben, einmal als wahr erkannt, für die Ewigkeit gültig. Die Mathematik der Antike hat genau solche Wahrheiten zu bieten: Geometrie und das Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüche eingeschlossen.

Diese Mathematik konnte man gut dahingehend missverstehen, dass sie etwas über die Ordnung der Welt aussagt: Die Zahlen bekamen eine eigene Bedeutung; beispielsweise stand die Fünf für das Leben an sich und für den Äther, das fünfte Element. Alles musste sich zählen lassen. Der Atomismus war eine Konsequenz der Auffassung, die in dem Pythagoras oder auch Platon zugesprochenen Satz „Alles ist Zahl“ zum Ausdruck kommt.



Die Jesuiten erkannten die Kraft der Mathematik und stellten sie, nach Jahrhunderten der Vernachlässigung, ins Zentrum ihres äußerst erfolgreichen Ausbildungssystems. Das Ansehen der klassischen Mathematik wuchs in Kirchenkreisen vor allem durch die Einführung des gregorianischen Kalenders im Jahre 1582. Mathematik zeigte sich als ewig währende Ordnung und sie stimmte vollkommen mit den Lehren der katholischen Kirche überein. Insbesondere der sich aus einigen wenigen Axiomen ergebende Aufbau der Geometrie spiegelte die hierarchische Ordnung der Kirche wieder; die natürliche, die gottgegebene Ordnung also.

Auch für die modernen Wissenschaften ist die Mathematik unentbehrlich. Hier spielt sie allerdings die „negative“ Rolle des unbestechlichen Kritikers: Theorien stürzen, wenn sich aus ihnen über mathematisch einwandfreie Deduktionen Widersprüche herleiten lassen.

In den kirchlichen Dogmen und den Spekulationen des Altertums spielt die Mathematik eine konstruktive Rolle, in der modernen Wissenschaft wirkt sie destruktiv. Aber in beiden Fällen stützt man sich auf die Unfehlbarkeit ihrer Urteile.

Spekulationen, die auf der ordnenden Kraft der Zahlen beruhen, wurden teilweise prägend für die moderne Wissenschaft, teilweise wurden sie widerlegt. Die Ätherhypothese ging spätestens mit der Relativitätstheorie unter. Der Atomismus hingegen wurde nach über zwei Jahrtausenden tatsächlich bestätigt. Die religiös-neuplatonische Idee, dass der Sonne der höchste Platz im Universum gebührt, stand am Anfang der kopernikanischen Wende und bekam eine über die Spekulation hinausgehende Relevanz. Viele Beispiele für das Scheitern von Dogmen lassen sich finden; aber auch solche für unverhoffte Bestätigungen.

Ist die Mathematik tatsächlich so unfehlbar, wie mancher glaubt? Zweifel sind angebracht. Immer wieder im Laufe der Mathematikgeschichte treten Paradoxien auf. Selbst die Mathematik ist zeitweise ziemlich unordentlich. Kirchennahe Kreise behalfen sich damit, gewisse Entwicklungen der Mathematik einfach per Dekret zu verbieten, was aber auch nur vorübergehend – und nicht ohne großen Schaden anzurichten – gelang. Davon soll zunächst kurz die Rede sein. Aber es wird noch dramatischer: Die Mathematik selbst wuchs über sich hinaus und machte das Chaos, den Zufall zum Gegenstand. Und darum geht es mir in der Hauptsache.

In der Wissenschaft, in der Kunst und in der Gesellschaft finden wir dieselben Prinzipien der Evolution. Der Gang der Dinge folgt dem Wechsel zwischen Zufall und Notwendigkeit, zwischen Chaos und Ordnung, zwischen Freiheit und Dogma.

Schauen wir uns das am Beispiel der Architektur einmal etwas genauer an. Mich beeindruckt das Raumgefühl, das die gotischen Kathedralen vermitteln – hier die Kathedrale Notre-Dame in Reims. Das ist Stein gewordene Mystik. Wie erreicht man einen Raum so voller Licht? Indem man Kreuzrippengewölbe einführt und Fenster an die Stelle von Wänden setzt.

Dass die oberen Fenster, die des Mittelschiffs, dieselben Maße wie die Fenster der Seitenschiffe haben, vervollständigt den überwältigenden Eindruck.

Diese Gleichförmigkeit kommt dem Trend der Gotik zur Standardisierung entgegen. Die Bauelemente wurden weitgehend bereits in den Steinbrüchen vorgefertigt. Die Bauhütte bestellte diese normierten Elemente in großen Mengen.

Wollten Baumeister des Mittelalters etwas Neues wagen, stand vor allem eine Methode zur Verfügung: *Ausprobieren.* So kommen schöpferisches Chaos und Zufall ins Spiel.

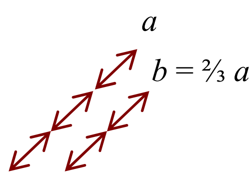
Man führe sich vor Augen: Das Zeitalter Newtons und Leibniz' lag noch mehrere Jahrhunderte in der Zukunft. Die Mathematik hatte damals noch keine Differential- und Integralrechnung zu bieten. Beim Ausprobieren kam es auch zu Fehlschlägen, und mancher Bau stürzte ein. Erfolgreiche Lösungen wurden von anderen Baumeistern übernommen und breiteten sich aus.

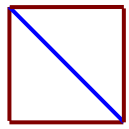
Aus dem chaotischen Ausprobieren erstanden Gebilde von großer Harmonie und *Ordnung* wie eben die Kathedrale von Reims. Und diese Ordnung wird von manchem als göttlich empfunden.

### *Chaos*

Bleiben wir bei der antiken Mathematik. Strecken lassen sich miteinander vergleichen. Das gelingt mit Zirkel und Lineal, zumindest wenn sich die größere der Strecken durch Hintereinanderauftragen der kleineren ergibt. Dann ist die größere Strecke ein Vielfaches der kleineren. Auch wenn das nicht hinhaut, bleibt die Möglichkeit, eine der Strecken gleichmäßig aufzuteilen, und nachzusehen, ob sich auch die andere Strecke als Vielfaches der so gewonnenen Teilstrecken darstellen lässt. Dann ergibt sich das Verhältnis der Strecken als Bruch ganzer Zahlen. Strecken, die sich so vergleichen lassen heißen *kommensurabel.* Es ist eine durchaus ordentliche Welt, wenn sie sich aus solchen kommensurablen Gegenständen zusammensetzt. Auch heute noch bezeichnen wir die ganzzahligen Brüche als rationale Zahlen, also als das, was der Vernunft gemäß ist.

Nun liegt es nahe, anzunehmen, dass es eine kleinste Teilstrecke – sozusagen ein Streckenatom – gibt, aus dem sich alle anderen Strecken durch hintereinander Auftragen gewinnen lassen. Dieser Gedanke lässt sich auf Flächen und auf Körper übertragen und so landen wir ganz schnell bei der Auffassung, dass sich die Welt aus Atomen zusammensetzt. Zenon, Demokrit und Aristoteles haben es wohl so oder ähnlich gesehen. Diese Mathematik beschreibt eine ordentliche, quasi göttliche Welt.





Aber von Anfang an gab es Probleme mit dieser Lesart des Atomismus. Nehmen wir die Länge der Diagonalen eines Quadrats. Gemäß Atomismus sollte sich die Diagonale als ganzzahliger Bruch $m/n$ der Seitenlänge ergeben. Der Satz des Pythagoras sagt uns, dass $m^2 = 2n^2$ sein muss. Und das kann nicht sein, wie sich leicht anhand der Primzahlzerlegungen von $m$ und $n$ feststellen lässt. Damit hat die ordentliche Welt einen Knacks bekommen: Hypotenuse und Kathete sind in diesem Fall inkommensurabel. Ein Hauch von Unordentlichkeit weht uns an.

Wir landen bei der erschreckenden Erkenntnis, dass die Atome die Ausdehnung null haben und damit wirklich unteilbar sein müssten. Und aus solchen Atomen lässt sich kein Gegenstand der realen Welt zusammensetzen. Der Traum, dass die Mathematik die physikalische Welt vollkommen erfasst, ist damit geplatzt. Das Unteilbare und mit ihm der Atomismus mussten aus der Wissenschaft verbannt werden.

Das taten die Jesuiten denn auch voller Eifer, gründlich und erfolgreich – mit verheerenden Auswirkungen für die weitere Entwicklung der Mathematik.

Dabei hatten die Jesuiten ja durchaus recht: Die Methoden der Anhänger des Unteilbaren, waren ja aus mathematischer Sicht tatsächlich anrüchig. Sie waren voller Paradoxien. Die Methoden dieser *experimentellen Mathematik*, wie diese Art der Mathematik später genannt wurde, führten zwar zu manchem neuen Ergebnis, aber eben nicht mit der in der Mathematik üblichen Strenge.

Ein typisches Beispiel für diese Art der Mathematik ist die Vorstellung, dass ein Körper aus mehreren Schichten, wie ein Buch aus mehreren Seiten, zusammengesetzt ist. Der Frage, wie dick diese Schichten sind, wurde damals trickreich umgangen. Bonaventura Cavalieri formulierte Regeln, deren Einhaltung sicherstellen sollte, dass die an sich widersprüchliche Vorstellung von gleichzeitig unendlich dünnen und doch ausgedehnten Schichten keine falschen mathematischen Konstruktionen nach sich zieht. Mancher Fehlschluss musste nachträglich bereinigt werden.

Die Jesuiten waren sozusagen die Rechthaber – und das ist hier durchaus auch anerkennend gemeint. Aber durch ihren *Dogmatismus* haben sie eine vielversprechende mathematische Entwicklung abgewürgt. Die Anfänge der neuen Mathematik liegen in Italien und sind mit den Namen Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri und Evangelista Torricelli verbunden. Heute bekommt jeder Schüler diese Namen zu hören.

Unter dem Einfluss der Jesuiten kam die Entwicklung der Mathematik in Italien zum Erliegen. Die Weiterentwicklung verlagerte sich nach Norden: Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz vollendeten das Programm des Unteilbaren und stellten die Lehre auf eine gesunde Basis. Sie schufen aus den Vorarbeiten der Italiener die *Infinitesimalrechnung,* ohne die wir keine Theorie des Elektromagnetismus und keine der Hydrodynamik hätten. Effiziente Turbinen und Motoren, Rundfunk, Telefonie, Flugzeuge oder Automobile wären außer Sichtweite. Es gäbe keine schlanken Brückenkonstruktionen und keine kühnen Hochhäuser. Andersherum gesehen: Unser ganzes modernes Leben ist durchdrungen von dieser neuen Mathematik.

Man sollte meinen, dass wir heutzutage vor Dogmatisierung sicher sind, mit dem abschreckenden Beispiel der Ächtung des Unteilbaren durch die Jesuiten vor Augen. Leider kann davon nicht die Rede sein. Ja es sind gerade die Realisten und Skeptiker unserer Tage, denen wieder einmal der Absturz in Rechthaberei und Dogmatismus droht.

Mario Bunge beispielsweise suchte nach den Prinzipien der Realität. Letztere sind für ihn und seine Adepten Martin Mahner und Gerhard Vollmer zumindest partiell erkennbar; sie erhalten den Rang von Postulaten, Forderungen also, die sachlich notwendig, wenn auch nicht beweisbar sind. Unter anderem will Martin Mahner das *Kausalitätsprinzip* als der Realität anhaftend ausgemacht haben. Und damit wird das Kausalitätsprinzip – egal welcher Ausprägung – zur ewigen Wahrheit; denn es ist ja die Unwandelbarkeit dieser Prinzipien, die sie erst dazu qualifiziert, die Dinge an sich, die Realität zu erfassen.

Wir brauchen Strukturen, Hypothesen, Theorien und Dogmen, denn in der Anomie gibt es keine Strukturen, die sich entwickeln können. Auf der anderen Seite braucht das Neue *Freiräume* für verrückte Gedanken, für das Illusionäre, für die Spekulation, das Unordentliche. Das Neue hat es schwer. Es muss sich in einer fortschrittsfeindlichen Umgebung voller Dogmen Gehör verschaffen – dabei hat es oftmals auch noch die besseren Argumente gegen sich.

## Vom Orakel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

### *Freiheit*

Wir haben gesehen, welche Rolle das Gegensatzpaar Dogmatismus und Freiheit bei der Erfindung des mathematischen Gebiets der Infinitesimalrechnung gespielt hat. Etwa zur gleichen Zeit wie die Infinitesimalrechnung ist eine weitere mathematische Disziplin entstanden, die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Auch hier geht es im Kern um die Idee der *Freiheit* und die Wurzeln reichen weit zurück. Im ersten Buch Mose steht: „Da sprach die Schlange zum Weibe: Ihr werdet keineswegs des Todes sterben, sondern Gott weiß: an dem Tage, da ihr davon esset, werden eure Augen aufgetan, und ihr werdet sein wie Gott und wissen, was gut und böse ist. Und das Weib sah, dass von dem Baum gut zu essen wäre und dass er eine Lust für die Augen wäre und verlockend, weil er klug machte. Und sie nahm von der Frucht und aß und gab ihrem Mann, der bei ihr war, auch davon, und er aß. Da wurden ihnen beiden die Augen aufgetan… Und Gott der HERR sprach: siehe, der Mensch ist geworden wie unsereiner und weiß, was gut und böse ist.“

Meine Kurzfassung dieser Geschichte geht so: Der Mensch ist neugierig, er wählt die Erkenntnis und gewinnt Entscheidungsfreiheit. Und das ist wohl das Wichtigste: Gott gesteht dem Menschen diese *Freiheit* zu! Sie mag nur zum Preis von Mühe und Qualen in einer ziemlich unordentlichen Welt gewonnen worden sein. Aber langweilig wird dem Menschen wohl nicht. Wer weiß, wie es ihm im Paradies auf Dauer ergangen wäre.

Der Gedanke, dass der Mensch der Herr seines Schicksals wird, muss damals ziemlich revolutionär gewesen sein. Zur dieser Zeit vorherrschend war der Glaube daran, dass das persönliche Schicksal von den Launen der Götter abhängt. Wenn die Griechen des Altertums wissen wollten, was das Morgen wohl bringen wird, befragten sie ein Orakel und nicht etwa die weisesten Leute ihrer Zeit. Denn Wahrheit und die Ordnung lag ja bei den Göttern. Dieser Glaube an die Fremdbestimmtheit des eigenen Lebens war wohl – anders als der Freiheitsgedanke aus dem ersten Buch Mose – eine Fortschrittsbremse.

### *Logik*

Wir sehen den „alten Griechen“ nach, dass sie noch nicht modern gedacht haben. Aber eine ganze Menge schöner Mathematik verdanken wir ihnen schon. Und ohne diese gäbe es unser modernes Denken gar nichts. Bezeichnenderweise geht es in der griechischen Mathematik ganz exakt zu, denn Exaktheit ist die Angelegenheit der Götter. Die Griechen habe quasi die Exaktheit in Form gebracht, in der *Logik* und in der Geometrie. Das ist der zweite Gedankenfaden, den wir aufnehmen müssen, wenn wir das Neue wirklich verstehen wollen.

Eine Leistung der Logik ist die Abschaffung des Orakels, denn entgangen kann es den Griechen nicht sein, dass dem Orakel ein grundsätzlicher logischer Widerspruch innewohnt. Entweder ist der Fragende ein völlig willenloses Wesen. In diesem Fall würde sich ein Orakel erübrigen. Andernfalls taugt die Vorhersage nichts.

Sehr unterhaltsam bringt uns das Philip Kindred Dick mit seinem „Minority Report“ nahe – übrigens sehr schön verfilmt mit Tom Cruise: Die drei Präkogs in dieser Geschichte können Morde vorhersagen. Wenn nur zwei einen Mord vorhersagen und der dritte abweichender Meinung ist, dann folgt die Polizei dem Mehrheitsvotum, verhindert den Mord und macht damit die Minderheitsmeinung wahr!

### *Lernort Glücksspiel*

Trotz solcher Widersprüche werden Orakel auch heute noch gern befragt. Wir nennen sie jetzt Wahrsager. Richtig ernst nimmt diese wohl niemand. So hoffe ich wenigstens. Der Besuch einer Wahrsagerin oder eines Wahrsagers ist eine von manchem als angenehm empfundene Form der sozialen Kontaktaufnahme ohne tiefere Bedeutung.

Das Schicksal ist uns von Gott in die Hände gelegt worden, sagt die Bibel. Und was haben wir davon? Wie sollen wir mit der neu gewonnen Entscheidungsfreiheit umgehen? Wie kann ich wissen, welche Entscheidung zu einem guten Ende führen wird und welche nicht? Mangels Orakel weiß ich ja doch nicht, welche Möglichkeiten mir die Zukunft bietet; mir fehlt die Basis für Entscheidungen.

Und damit sind wir – nach Freiheit und Logik – beim dritten Gedankenfaden, den wir aufgreifen wollen. Auch hier verliert sich der Anfang des Fadens in der frühen Menschheitsgeschichte. Es geht um das *Glücksspiel.* Hier sticht der Mangel an Vorhersehbarkeit besonders ins Auge: Aus dem Wissen über die Zukunft ließe sich sicherlich Gewinn ziehen. Wüsste ich, welche Augenzahl beim nächsten Wurf eines Würfels erscheint, könnte ich darauf setzen und gewinnen. Die Erfahrung sagt: Nein, das Vorausschauen, die Prägkognition, funktioniert nicht!

Oder vielleicht doch? Wenigstens ein bisschen? Zur Einstimmung in die folgenden Überlegungen habe ich diese kleine Aufgabe zum Nachdenken:

*Katzenjunge.* Eine Katze hat vier Junge bekommen. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, dass alle vier dasselbe Geschlecht haben. Mit größerer Wahrscheinlichkeit sind nur drei vom selben Geschlecht. Am wahrscheinlichsten sind zwei weibliche und zwei männliche Katzen. Sind diese Aussagen richtig?

Nun zu unserer Frage: Sind Voraussagen möglich, wenn der Zufall die Hauptrolle spielt? Schauen wir uns die Sache einmal an, und zwar an einem

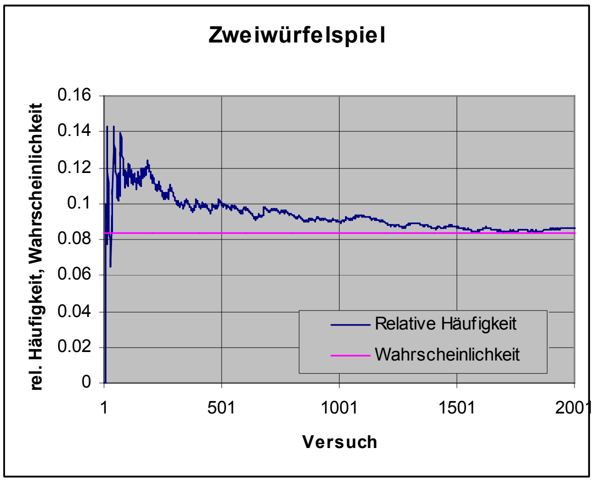
*Zweiwürfelspiel.* Zwei Würfel werden geworfen. Ich soll vorab eine Augensumme, also eine Zahl nicht kleiner als zwei aber höchstens gleich zwölf nennen. Falls die von mir vorausgesagte Augensumme erscheint, erhalte ich das Zehnfache meines Einsatzes zurück.

Ich will einen kleinen Betrag setzen, 1 €. Welche Augensumme ich voraussage, scheint ziemlich egal zu sein. Ich nehme die Vier. Und tatsächlich: Gewürfelt wird eine Eins und eine Drei. Ich kann mich über die netto gewonnenen neun Euro freuen.

Später, in aller Ruhe, frage ich mich, ob meine Entscheidung wirklich geschickt war: Ist es wirklich egal, welche Augensumme ich wähle? Nehmen wir einmal an, der eine Würfel ist blau, der andere rot. Die Punktzahlen der Würfel schreiben wir als Zahlenpaar, blau zuerst, rot dahinter. Die Vier ergibt sich bei den Kombinationen (1, 3), (2, 2) und (3, 1). Das sind drei von insgesamt 36 möglichen.

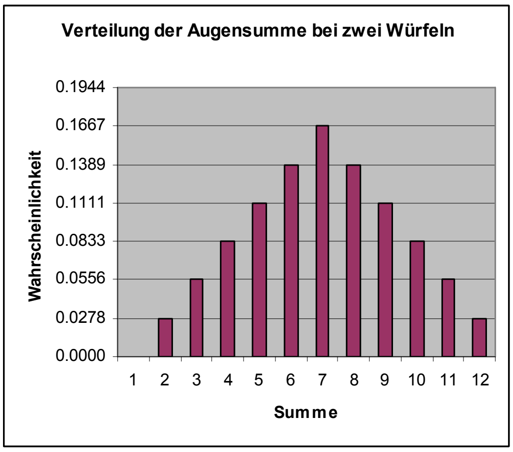
Welche Chancen habe ich, dass eine dieser drei Kombinationen gewürfelt wird?

Um der Antwort näher zu kommen, stellen wir uns vor, dass das Spiel sehr oft ausgewürfelt wird und fragt nach der gesamten Trefferzahl. Die relative Häufigkeit, also der Quotient aus Trefferzahl und Gesamtzahl der Würfe ist ein Maß für die Chance, bei einem Spiel zu gewinnen.




Wir machen ein *Experiment*, indem wir fortlaufend würfeln und nach jedem Wurf die relative Trefferhäufigkeit, also die Anzahl der Treffer geteilt durch die Gesamtzahl der Würfe, notieren. Es zeigt sich, dass dieser Wert schwankt und dass die Schwankungen immer kleiner werden. Gleichzeitig scheinen sich die relativen Häufigkeiten einem bestimmten Wert anzunähern. Wir wollen die Existenz eines solchen Wertes, der sich bei sehr hohen Versuchzahlen einstellt, postulieren und nennen ihn *Wahrscheinlichkeit.* Schauen wir uns das Ergebnis eines solchen Experiments mit insgesamt 2001 Versuchen einmal an (s. Grafik).

Die relative Häufigkeit der Augensumme 4 liegt bei 2001 etwas oberhalb von 8%. Das können wir noch genauer haben: Für jede der 36 möglichen Kombinationen (1, 1), (1, 2), (1, 3), …, (6, 4), (6, 5), (6, 6) wird sich, da es keinen Grund gibt, eines der verschiedenen möglichen Ergebnisse zu begünstigen, dieselbe Wahrscheinlichkeit ergeben (Indifferenzprinzip). Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, über alle möglichen Ergebnisse genommen, ist gleich eins, oder 100%. Daraus folgt, dass jede der Kombinationen mit der Wahrscheinlichkeit von 1/36 auftritt. Da die Augensumme vier bei drei dieser Kombinationen erscheint, muss die Wahrscheinlichkeit für dieses *Ereignis* gleich 3/36 = 1/12 = 8,333…% sein.




Der Verlust des Spieles tritt demnach im Mittel in elf von zwölf Fällen ein und der Gewinn in einem von zwölf. Bei mir ist es noch einmal gut gegangen. Ich frage mich, ob es bei anderen Augensummen günstiger aussehen könnte. Und in der Tat: Einfaches Nachrechnen ergibt eine Verteilung der Augensummen, wie sie die nebenstehende Grafik zeigt.

Wenn ich in jedem zwölften Spiel neun Euro gewinne und bei allen anderen einen Euro verliere, dann hätte ich bei vielen Wiederholungen meines Spiels im Mittel eine finanzielles Ergebnis von 9€ × 1/12 – 1€ × 11/12 = -1/6€. So sehen Verluste aus; diese *Verlusterwartung* wird auch *Risiko* genannt. Hätte ich eine andere Augensumme vorgegeben, beispielsweise sieben, wäre die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich 6/36 = 1/6 und das mittlere finanzielle Ergebnis gleich 9€ × 1/6 – 1€ × 5/6 = 2/3€. Das ist eine ganz ordentliche *Gewinnerwartung*. Ich hätte mich so *entscheiden* sollen. Ich habe bei meiner ungünstigen Wahl eben nur besonders viel Glück gehabt.

Das Spiel zeigt: Er gelingt also doch, der Blick in die Zukunft! Nicht definitiv, aber doch mit Gewinnaussicht.

Ich habe hier das Vorhersageproblem für ein einfaches Würfelspiel gelöst. Dabei habe ich mich in der modernen Begriffswelt aufgehalten. Genaugenommen war das, was ich eben mit Ihnen gemacht habe, ein Steilkurs in elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie heute den Kindern bereits in der Mittelstufe (Sekundarstufe I) nahegebracht wird. Die Kernbegriffe dieses modernen Denkens sind *Experiment, Ereignis, Wahrscheinlichkeit, Gewinnerwartung, Risiko* und *Entscheidung*.

Schauen wir einmal, wie weit die Analyse von Glücksspielen in der Renaissance gediehen war. Am besten sieht man das, wenn man sich die diesbezüglichen Anstrengungen eines Universalgelehrten der damaligen Zeit anschaut. Ein solcher Universalgelehrter war Girolamo Cardano (1501-1576) – ja, der mit der Kardanwelle und der kardanischen Aufhängung.

Interessant ist, dass Cardano, ein Pionier der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das *Problem des abgebrochenen Spiels* zwar kannte aber nicht löste. Im nächsten Abschnitt schauen wir uns dieses Spiel genauer an. Es steht im Zentrum meines Vortrags.

Das Scheitern an dieser Aufgabe und daneben das von ihm Erreichte machen den Umbruch im Denken deutlich, das mit der letztendlichen Lösung des Problems einhergegangen ist. Was nun hatte Cardano erreicht?

Cardano war wohl der Erste, der die *statistische* Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffs – damals noch nicht so genannt – erfasste, nämlich das Konzept der relativen Häufigkeiten. Damit wurde die Wahrscheinlichkeit dem Experiment und der Messung zugänglich. Dem steht ein älterer Wahrscheinlichkeitsbegriff gegenüber, bei dem die Wahrscheinlichkeit eher „aus dem Bauch heraus“ benannt wird. Wahrscheinlichkeit besitzt dann die Bedeutung von *Glaubwürdigkeit.* Beispiele für Wahrscheinlichkeitsaussagen im Sinne der Glaubwürdigkeit sind allgegenwärtiger Bestandteil der täglichen Kommunikation. Wenn ich beispielsweise sage, dass es morgen höchstwahrscheinlich regnen wird und mich auch noch dazu hinreißen lasse, das zu präzisieren und die Regenwahrscheinlichkeit mit 90% beziffere, dann gibt es keine Möglichkeit, diese Aussage mit Erfahrungswerten zu untermauern. Morgen wird es regnen oder auch nicht. Das ist dann weder eine Bestätigung noch eine Widerlegung meiner Aussage.

Die *Glaubwürdigkeit* tritt an die Stelle der klassischen statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wenn es an statistischen Belegen mangelt. Aber rechnen kann man damit wie mit den Wahrscheinlichkeiten im statistischen Sinn. Absolutes Wissen lässt sich damit aber nicht beschreiben, Wissenszuwachs schon. Solche Zusammenhänge werden im Rahmen der Mathematik des plausiblen Schließens, auch induktive Logik genannt, behandelt. Man spricht in diesen Fällen auch von *induktiven Wahrscheinlichkeiten* im Unterschied zu den *statistischen Wahrscheinlichkeiten.* „Subjektive Wahrscheinlichkeit“ wäre auch eine passende Bezeichnung.

Auch die Kombinatorik im oben gezeigten Umfang hat Cardano für seine Analysen benutzt, wohl auch das Indifferenzprinzip. Da Cardano ein leidenschaftlicher Spieler war, ist er den Fragen nach der Verhältnismäßigkeit von Einsatz und Gewinnaussicht nachgegangen. Sein Buch ist der erste uns bekannte Versuch, *Risiken* zu quantifizieren.

Während die Griechen den Lauf der Welt noch in der Hand der Götter sahen, machten sich die Renaissancemenschen daran, das Regelmäßige im Weltenlauf zu erfassen. Sie experimentierten und erfassten auch die Rolle des blinden *Zufalls,* der beim Spiel mit fairen Würfeln beispielsweise zutage tritt.

In der Person Cardanos treffen wesentliche in der Renaissance wirksame Triebkräfte zusammen: die Freiheit des Denkens, die Lust am Experiment und der Wunsch, die Zukunft zu bändigen.

Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt. Die Fäden finden zusammen.

### *Das abgebrochene Spiel*

Das neue Denken, von dem ich hier spreche, ist verbunden mit der Lösung eines alten Problems, genannt *das abgebrochene Spiel*. Es wurde von Luca Pacioli (1445-1517) in seinem Mathematikbuch aus dem Jahre 1494 publiziert. Es blieb noch eine ganze Weile ungelöst. Auch Girolamo Cardano scheiterte an dieser Aufgabe. Er vermochte nicht, trotz Bemühungen, eine Lösung zu finden

Die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat entwickelten im Laufe eines Briefwechsels ihre jeweils eigenen Lösungen des Problems. Dieser Briefwechsel aus dem Jahre 1654 gilt heute als der eigentliche Ursprung der *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* einer neuen Art zu denken und zu rechnen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Grundlage jeglicher Risikobewertung und diese ermöglicht es dem Menschen, zukünftige Ereignisse und Abläufe ins Kalkül zu ziehen, selbst wenn sie nicht mit Notwendigkeit eintreten wie der alltägliche Sonnenaufgang und die Flugbahn bei einem Steinwurf. Die Rede ist von Ausfällen, Unfällen, Wetter- und Preisentwicklungen, Warenströmen, Markterfolg, Lagerauslastungen, Versorgungsnetzüberlastungen und vielem anderen. Das moderne Leben, das Versicherungs- und Bankenwesen, die technische Entwicklung, Planung und Organisation von Fabriken und Verwaltungen sind ohne das mathematische Instrumentarium der *Risikoanalyse* undenkbar.

Das Problem des abgebrochenen Spiels formuliere ich für meine Studenten so: Zwei Freunde, Albert und Bertrand, spielen gern und gleich gut Schach. Sie vereinbaren ein Spiel mit mehreren Partien und einem Einsatz von – sagen wir – fünfzig Euro für jeden. Gewonnen hat derjenige, der zuerst sechs der Schachpartien gewonnen hat. Die Runden ziehen sich in die Länge. Als Albert vier Runden und Bertrand drei Runden gewonnen hat, lenkt sie die gerade beginnende Fußballweltmeisterschaft vom Spiel ab. Sie fragen sich, wie sie bei Spielabbruch den

Einsatz gerecht untereinander aufteilen sollen. Einfach halbe-halbe machen, das sieht auch Bertrand ein, ist ungerecht. Aber wie lassen sich die Gewinnaussichten quantifizieren und in eine gerechte Aufteilung umsetzen?

Die Neuartigkeit der Lösung von Pascal und Fermat tritt erst hervor, wenn man sich die bis dahin üblichen Lösungsvorschläge anschaut. Sie sind gekennzeichnet durch den Blick in die Vergangenheit. Mancher Student kommt, ebenso wie die meisten Zeitgenossen Cardanos auf die Idee, den Einsatz im Verhältnis der gewonnen Partien aufzuteilen. In unserem Fall wären das 100 € × 4/(3+4), also rund 57 € für Albert und 43 € für Bertrand.

Pascal und Fermat hingegen wenden den Blick von der Vergangenheit ab und schauen in die Zukunft: Sie fragen sich, wie groß die Chancen des einen sind, zu gewinnen, und wie groß die des anderen. Sie nehmen also nicht die bisher gespielten Runden zum Maßstab, sondern die, die noch ausstehen. Der Einsatz wird dann im Verhältnis der ermittelten Gewinnchancen zugeteilt. Statt von Chancen sprechen wir heute von Wahrscheinlichkeiten.

Wie lassen sich die Chancen quantifizieren?

### *Pascals Methode*

Wir wenden uns nun speziell der Methode des Blaise Pascal zu. Denn diese Methode ist den meisten von uns bereits in der Schule begegnet, im pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten. Machen Sie sich noch einmal kurz klar, wie das Dreieck zustande kommt. Dann können Sie mir leichter folgen.

Ich wähle Pascals Methode auch deshalb, weil ihr ein Prinzip zugrunde liegt, das auch in unseren Tagen eine große Rolle spielt. Jeder Informatiker sollte es kennen, denn ein ganzes Fachgebiet, nämlich die Dynamische Optimierung, beruht darauf. Ich spreche vom *Einbettungsprinzip,* und das funktioniert so: Man geht nicht direkt auf die Lösung des ursprünglichen Problems los, sondern man bettet es in eine verallgemeinerte Problemstellung ein. Statt nur eines Problems hat man nun viele. Für diese macht man Lösungsansätze und nutzt die Beziehungen zwischen den Lösungsansätzen für die Lösungsfindung aus. Mit der Lösung der vielen Probleme hat man dann natürlich auch die Lösung für das spezielle, ursprünglich gegebene.

Zunächst der Blick nach vorn: Es interessiert nicht, wie viele Spiele wer gewonnen hat, sondern wie viele er noch gewinnen muss. Bei Albert sind es zwei und bei Bertrand drei. Nun die Verallgemeinerung: Statt zwei bei Albert können es auch 0, 1, 2, 3, … sein und dasselbe gilt bei Bertrand. Anstelle der drei können noch 0, 1, 2, 3 … Siege ausstehen. Für jedes Paar nichtnegativer Zahlen gibt es also ein Problem. Das ursprüngliche Problem gehört dann zum Zahlenpaar (2, 3).

Mit $p(a, b)$ wollen wir die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, mit der Albert das Spiel gewinnt, wobei $a$ die von Albert noch zu gewinnenden Spiele sind und $b$ die des Bertrand. Die Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage wäre dann: $p(2, 3)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Albert das abgebrochen Spiel gewinnt. Der Einsatz sollte im Verhältnis $p(2, 3):(1- p(2, 3))$ auf Albert und Bertrand aufgeteilt werden.

Nun zum Lösungsweg: Für einige dieser Probleme lassen sich die Wahrscheinlichkeiten sofort angeben. Da (0, 0) kein sinnvoller Spielstand ist, fangen wir mit (0, 1) an: Albert hat kein Spiel mehr offen, also ist die Wahrscheinlichkeit das Albert gewinnt, gleich eins. Das gilt natürlich auch dann noch, wenn Bertrand noch mehrere Spiele braucht:

$$1 = p(0, 1) = p(0, 2) = p(0, 3) = ...$$

Falls Bertrand schon durch ist, hat Albert natürlich keine Chancen mehr:

$$0 = p(1, 0) = p(2, 0) = p(3, 0) = ...$$

Nehmen wir nun den Spielstand (1, 1). Das nächste Spiel gewinnt Albert mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 und das führt auf den Spielstand (0, 1). Mit derselben Wahrscheinlichkeit kommt es beim Verlust des Spiels zum Spielstand (1, 0). Es ist nun leicht einzusehen, dass die Wahrscheinlichkeit für Alberts Turniergewinn sich aus den Wahrscheinlichkeiten so zusammensetzt:

$$p(1, 1) = \tfrac{1}{2}\times p(0, 1) + \tfrac{1}{2}\times p(1, 0) = \tfrac{1}{2}\times 1 + \tfrac{1}{2}\times 0 = \tfrac{1}{2}.$$

Das haben wir uns natürlich gleich gedacht: Bei ausgeglichenem Spielstand sind die Gewinnchancen der beiden gleich groß. Nur unsere Rechnung war etwas umständlich. Aber gemach, der nächste Schritt offenbart ein kleines Wunder. Wir fragen nun nach den Gewinnchancen für den Spielstand (1, 2). Die beiden Folgespielstände, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit ½ erreicht werden, sind (0, 2) und (1, 1). Für beide kennen wir die Wahrscheinlichkeiten, und mit derselben Überlegung wie soeben erhalten wir:

$$p(1, 2) = \tfrac{1}{2}\times p(0, 2) + \tfrac{1}{2}\times p(1, 1) = \tfrac{1}{2}\times 1 + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}.$$

So können wir uns voranhangeln und Alberts Gewinnwahrscheinlichkeit für jeden denkbaren Spielstand ermitteln. Bringt man das Ganze in Tabellenform, wird man nicht zu Unrecht an das Pascalsche Dreieck erinnert.

| $b\rightarrow$ <br> $a\downarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | ½ | ¾ | ⅞ |
| 2 | 0 | ¼ | ½ | 11/16 |
| 3 | 0 | ⅛ | 5/16 | ½ |

Jetzt haben wir auch Alberts Gewinnchancen beim Spielstand (2, 3). Sie sind gleich 11/16. Der Gewinn sollte also 11:5 zugunsten Alberts aufgeteilt werden: 68.75 € für ihn und 31.25 € für Bertrand.

### *Der Zufall wird wesentlich*

Der Händler, der eine Schiffsladung mit Waren auf den Weg bringt, muss mit Schäden rechnen. Das Schiff könnte in Unwetter geraten und untergehen oder Piraten zum Opfer fallen.

Je größer die Unternehmung, je umfangreicher die bewegten Güter und je weiter die zu bewältigenden Strecken, desto größer ist der mögliche Gewinn – aber auch der drohende Schaden. Im Schadensfall droht gar die Vernichtung der Existenzgrundlagen.

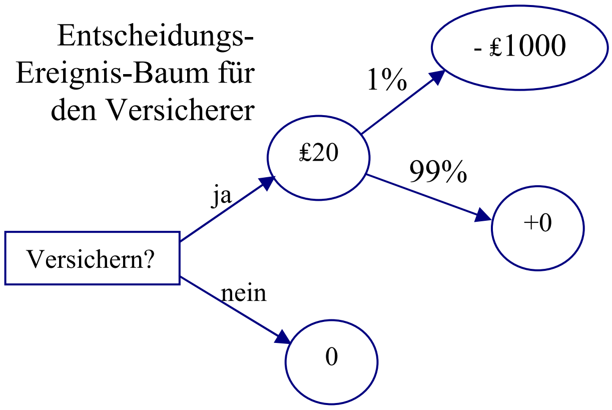
So entstand der Bedarf an Berechenbarkeit. Die Zukunft sollte planbar werden und die Gefahr der Existenzvernichtung gebannt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erwies sich als ein Mittel, die möglichen Verluste aufzuteilen und tragbar zu machen. Das moderne Versicherungswesen entstand.

Informationen über Kriege, Machtverhältnisse in fernen Gewässern und Wetterlagen wurden zu einer gefragten Ware. Umschlagplätze dieser Informationen waren die Kaffeehäuser dieser Zeit. Eines davon ist berühmt geworden. Noch heute existiert eine Versicherungsgesellschaft, die seinen Namen trägt: Edward Lloyd öffnet sein Kaffeehaus in den Londoner Docks an der Themse im Jahr 1687.

In diesen Kaffeehäusern trafen die Händler auf die Versicherungsleute. Das waren zunächst Einmannunternehmen, sogenannte Underwriter, die Versicherungspolicen für Schäden bis zu einem gewissen Umfang gegen Zahlung einer Prämie übernahmen. Das rechnete sich für beide Seiten: Der Händler konnte für sich den existenzbedrohenden Schaden ausschließen und die Underwriter bekamen Geld für Risiken, die sie durchaus tragen konnten.

Das Ganze funktioniert nur, weil die Schadenssummen auf für den Versicherer tragbare Größenordnungen heruntergebrochen werden und weil jeder Versicherungsgeber im Laufe der Zeit viele dieser Verträge abschließt, so dass gelegentliche Verluste durch die Prämien gedeckt sind. Auf diese Weise *dürfen die Versicherer mit statistischen Mittelwerten kalkulieren,* anders als der auf sich gestellte Kaufmann, der gezwungen ist, mit Vermögenswerten umzugehen, die sein Vermögen bei Weitem übersteigen.

Ein Zahlenbeispiel. Ein Versicherer deckt einen möglichen Verlust von, sagen wir, £1000 für eine Prämie von £20 ab. Der Schaden tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% ein. Für den Kaufmann steht dem Vermögenswert von £1000 ein Gewinn von weiteren £1000 gegenüber. Da er die Prämie zahlen muss, verringert sich sein Gewinn auf £980. Das ist immer noch genug. Dafür muss er keinen großen Schaden mehr befürchten.




Der Versicherer steht vor dieser Situation: Er bekommt £20 und trägt dafür ein *Risiko* von 1% * £1000; das sind £10. Auf lange Sicht gesehen streicht er also die Hälfte der Prämien als Gewinn ein.

### *Risiko*

Den Begriff Risiko habe ich bereits mehrmals verwendet, ohne genau zu sagen, was damit genau gemeint ist. Ich beginne mit der Feststellung: Risiko quantifiziert die Angst vor einem möglichen Schaden. Und diese Angst wächst nicht nur mit der Schwere des befürchteten Schadens, sondern auch mit der Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Ereignis eintreten kann. Als vorläufiges Maß für das Risiko $R$ nehmen wir das Produkt aus Schadenswahrscheinlichkeit $p$ und Schadenshöhe $x$, also

$$R = p \cdot x.$$

Wenn wir diesen Gedankengang konsequent weiterverfolgen, kommen wir zum Begriff des Risikos als Schadenserwartungswert im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Am Versicherungsbeispiel konnten wir sehen, dass das so definierte Risiko tatsächlich den auf Dauer zu erwartenden mittleren Schaden misst, wenn die Entscheidungssituation vielfach wiederholt wird. Ebenfalls klar geworden ist, dass es nur um Entscheidungen gehen kann, bei denen die Beträge das persönliche oder unternehmensweite Budgets nicht drastisch übersteigen.

Bei katastrophalen und sehr selten eintretenden Folgen ist das Maß des Risikos im hier umrissenen Sinn unangemessen.

Die Statistik liefert uns Abschätzungen von Wahrscheinlichkeiten. Wir haben Erfahrung, welche Entscheidungsalternativen und welche Folgen in Betracht zu ziehen sind. Die Risikoanalyse ist ein Instrument, mit dem wir die Erscheinungen der Vergangenheit in Abschätzungen der Zukunft ummünzen können.

Die Methode der Risikobewertung lässt sich offenbar nicht nur auf Situationen mit möglichen Schäden anwenden, sondern auch auf solche mit möglichen Gewinnen, wie im Falle des Glücksspiels, wie wir weiter oben gesehen haben.

Die objektive Risikobewertung ist nur in der Welt der mittleren Dimensionen sinnvoll. Erst wenn die mögliche Kosten und der mögliche Nutzen auf „menschliches Maß" heruntergebrochen sind, wenn die Beträge das Monats- oder Jahresbudget nicht überschreiten, dann ist die Schadenserwartung oder Nutzenerwartung im Sinne von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechung eine angemessene Grundlage der Entscheidungsfindung. Wird dieser Rahmen weit überschritten, kommen subjektive Einflüsse ins Spiel oder die Rechnung wird gar von vornherein sinnlos.

Damit wird sogar eine weithin akzeptierte Grundlage der Moral, der *kategorische Imperativ* des Immanuel Kant, fragwürdig. „Was die eigenen Entscheidungen angeht, ist man oft extrem risikobereit: Man fährt Auto oder sogar Motorrad, man klettert auf Berge, man heiratet. Bei Gefahren, die einem von anderer Seite zugemutet werden, ist man dagegen hochempfindlich ... Übersetzt in das Thema Moral heißt dieser ‚double standard': Es gibt keine sinnvolle Anwendung für die Maxime der Reziprozität ... Wenn noch gälte: ‚Liebe Deinen Nächsten wie Dich selbst', könnte dieser sich auf allerhand gefasst machen." (Niklas Luhmann)

## Ungewissheit

Nichts gegen Dogmen und Metaphysik. Aber klar muss sein, worüber man redet: Wer einer esoterischen Praktik den Anschein der Wissenschaftlichkeit gibt, ohne dass irgendein nachprüfbarer Sachverhalt ins Spiel gebracht wird, der *überschreitet die Grenze unserer Erkenntnisfähigkeit;* er gelangt ins Reich der subjektiven Empfindungen und betreibt Pseudowissenschaft. Aber nicht immer ist es so einfach. Auch unsere hochgeschätzten Pioniere der Wissenschaft hatten zuweilen Schwierigkeiten, ihren Lehren konsequent zu folgen und Grenzüberschreitungen zu vermeiden.

### *Setzen auf Gott: Pascals Wette*

Vom französische Religionsphilosophen, Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623-1662) stammt die folgende Wette: Wenn du an Gott glaubst – sozusagen auf ihn setzt – und Gott existiert nicht, so verlierst du nichts. Wenn du aber nicht an Gott glaubst und Gott existiert, dann kommst du in die Hölle. Deswegen ist es vernünftig, an Gott zu glauben. So wahrst du deine Chance, in den Himmel zu kommen.

Wir wissen nicht, ob Blaise Pascal das ernst gemeint hat, oder ob es nur eine Art Parodie ist. Wir schließen uns einer weit verbreiteten Auffassung an und gehen von der Ernsthaftigkeit aus. Möglicherweise suchte Pascal eine rationale Verteidigung seines Glaubens. Rationalismus und Aufklärung waren äußerst erfolgreiche Denkrichtungen in unserer Ideengeschichte; kein Wunder also, dass die Rationalität des Menschen hoch eingeschätzt und auch überschätzt wurde. Viel war mit Vernunft erklärbar, warum nicht auch Gott?

Falls ernst gemeint, kommt einem sofort ein ganzer Haufen Einwände gegen die Aussagekraft der Wette in den Sinn: Was ist, wenn Gott alle diejenigen gar nicht mag, die aus reinen Vernunftgründen an ihn glauben? Das liegt sogar nahe, denn schon der Verstoß gegen das Verbot, vom „Baum der Erkenntnis des Guten und Bösen“ zu essen hatte ja drastische Folgen (1. Mose 2, 17). Was ist, wenn Gott das Universum dem Teufel überlassen hat? Oder wenn es in der Hölle recht lustig, im Himmel dagegen ziemlich langweilig ist? Oder wenn ... Lässt man der Phantasie freien Lauf, verflüchtigt sich die scheinbar zwingende Kraft des Pascalschen Arguments für den Glauben.

Der mögliche Gewinn oder Schaden, den wir für die Risikorechnung quantifizieren müssen, bleibt hier völlig ungewiss. Dasselbe gilt für die Wahrscheinlichkeiten, die wir für die Rechnung brauchen. Und das Wichtigste: Wir wissen grundsätzlich nicht, inwieweit wir den Entscheidungsraum durch die beiden Alternativen „Setzen auf Gott: ja oder nein“ ausgeschöpft ist. Es fehlt der Erfahrungshintergrund, der eine solche Einengung der Menge aller prinzipiell denkbaren Welten auch nur nahe legen oder in irgendeiner Weise stützen könnte. Es fehlen also sämtliche Ingredienzen, die wir für die Anwendung der Risikoanalyse brauchen.

Unser Hang zur Bildung von einschränkenden Hypothesen ist es, der Wissenschaft überhaupt erst möglich macht. Dieser Hang ist es aber auch, der uns anfällig macht für die Manipulation unserer Gedanken durch andere. Wir durchschauen meist nicht sofort, dass eine Hypothese – wie die der Existenz von Himmel und Hölle – leer und nutzlos ist. Wir übersehen allzu leicht, dass es widerlegende Erfahrungen gar nicht geben kann. Und eine Hypothese über die Beschaffenheit der Welt, die prinzipiell nicht an der Erfahrung scheitern kann, beinhaltet keinerlei Erkenntnis über diese Welt. Sinnvolle und begründete Prognosen lassen sich damit nicht gewinnen. Die Möglichkeit einer rationalen Entscheidung wird bei der Pascalschen Wette nur vorgetäuscht.

Die Modellierung der Entscheidungssituation scheitert vor allem an der prinzipiellen *Ungewissheit* bezüglich des zu Modellierenden: Für die Risikoberechnung müssten sämtliche Entscheidungsalternativen, die möglichen Folgen und die Wahrscheinlichkeiten bekannt sein. Und von alledem haben wir im Fall der Pascalschen Wette nicht die geringste Ahnung. Pascal wird das wohl auch eingesehen haben. Die Pascalsche Wette liegt denn auch nur in Form von nachlässigen Skizzen vor.

### *Darwins Qualen: Schöpfungsglaube kontra Zufall und Notwendigkeit*

Charles Darwin (1809-1882) hat sein bahnbrechendes Werk „Über die Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl“ im Jahre 1959 veröffentlicht. Über zwanzig Jahre hat er sich mit seinen revolutionären Erkenntnissen herumgeplagt, bevor er sich in die viktorianische, durch große Gläubigkeit geprägte Öffentlichkeit wagte. Seine Vorstellungen, die im Gefolge einer Weltreise in den Jahren 1831 bis 1836 in ihm heranreiften, waren ja auch für ihn, einem gutbürgerlichen Menschen in konservativem Umfeld, im äußersten Maße erschreckend: Nicht eine lenkende Schöpferhand soll das Leben in seiner Vielfalt und letztlich auch uns Menschen hervorgebracht haben; allein Zufall und Notwendigkeit, Variation und Selektion sollen im Spiel gewesen sein.

In seinem Buch lassen sich leicht Beispiele für seine Skrupel finden: „Ich habe bisher von den Abänderungen […] zuweilen so gesprochen, als ob dieselben vom Zufall abhängig wären. Dies ist natürlich eine ganz inkorrekte Ausdrucksweise; sie dient aber dazu, unsere gänzliche Unwissenheit über die Ursache jeder besonderen Abweichung zu beurkunden.“ (Kapitel 5 in „Entstehung der Arten“)

In seiner Autobiografie legt Darwin Zeugnis davon ab, wie ihn allmählich der Unglaube beschlich. Das Ende dieser Entwicklung beschreibt er so: „Das Geheimnis des Anfangs aller Dinge ist für uns unlösbar, und ich für meine Teil muss mich bescheiden, ein Agnostiker zu bleiben.“

Der Begriff des Agnostizismus geht auf Thomas Henry Huxley (1825-1895) zurück, einem der wortmächtigsten Vertreter des Darwinismus. Er sagt es so: „Agnostizismus ist kein Glaube sondern eine Methode“. Sie besteht seiner Auffassung nach darin, der Vernunft zu folgen soweit sie trägt und keine Schlussfolgerungen zu vertreten, die sich nicht nachweisen lassen.

### *Das Ziegenproblem*

Wir haben gesehen, dass es selbst den großen Denkern bis ins 19. Jahrhundert hinein schwergefallen ist, Zufall oder gar die Unbestimmtheit zu ertragen, und dass auch für sie die Flucht in Scheinsicherheiten nicht allzu fern lag.

Auch heute fällt es den meisten Menschen schwer, Unbestimmtheit zu akzeptieren. Ein frappierendes Beispiel finden wir in der Wikipedia unter dem Stichwort „Ziegenproblem“. Dort wird eine bekannte Denksportaufgabe auf völlig unangemessene Weise abgehandelt. In meinem Weblogbuch Hoppla! habe ich darüber geschrieben: „Kontroverse um das Drei-Türen-Problem (Ziegenproblem) dauert an.“

Keiner der Autoren des Artikels und keiner der Diskussionsteilnehmer – insgesamt wohl über tausend Leute – scheinen zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein völlig unangemessenes Werkzeug ist, wenn Willkür und in deren Gefolge die *Ungewissheit* ins Spiel kommen.

### *Die fragwürdige Skala des Agnostizismus*

Wenn ein Logiker Beispiele für kränkelnde Logik braucht, kann er sich bei den klassischen Gottesbeweisen bedienen. Auch moderne Argumente, die Pascal bei seiner berühmten Wette auf Gott bemüht, laufen auf einen Trugschluss hinaus. Die Geringschätzung Gottes hat in das Denken Einzug gehalten. Und einige gehen weiter: Die Atheisten sehen die Nichtexistenz Gottes als erwiesen an. Aber der Beweisversuch der Nichtexistenz landet in demselben Gedankensumpf wie derjenige für die Existenz Gottes.

Was Pascal für die Rettung des Gottesbeweises mit Mitteln der Wahrscheinlichkeit versucht hat, unternimmt Richard Dawkins in seinem Buch The God Delusion im Abschnitt The Poverty of Agnosticism für den Atheismus. Ihm geht es darum, die verschiedenen Grade der Gottesleugnung zu erfassen. Was dabei nur herauskommen kann und auch herausgekommen ist, nennt man Pseudowissenschaft: es kommt wissenschaftlich daher, kann den Wissenschaftsanspruch aber nicht einlösen.

Richard Dawkins schreibt, dass man der Existenz Gottes eine Wahrscheinlichkeit zumessen könne und er beschreibt den Agnostiker als jemanden, der der Existenz Gottes eine Wahrscheinlichkeit von um die fünfzig Prozent zumesse. Man sollte hier also besser nicht von induktiven Wahrscheinlichkeiten reden, sondern eher von *intuitiven* oder *subjektiven*.

Dawkins ist ein Glaubenskämpfer in Sachen Atheismus. Ihm will offenbar nicht einleuchten, dass der Agnostizismus eine logisch einwandfreie und *entschiedene Position der Entscheidungsenthaltung* ist: Der Agnostiker verweigert sich der Zumutung, eine Aussage für oder gegen die Existenz Gottes zu treffen. Und dieselbe Verweigerungshaltung gilt für Wahrscheinlichkeitsaussagen. Eine Wahrscheinlichkeitszumessung zur Existenz Gottes ist für den Agnostiker ohne Sinn, da jeglicher Erfahrungshintergrund fehlt. Ohne Aussicht auf eine Statistik bleibt die *Ungewissheit total.*

Dazu kommt, dass den Agnostiker die gestellte Frage gar nicht so sehr interessiert. Als wahrer Skeptiker lehnt er es ab, sich von Glaubensaktivisten jedweder Couleur auch noch in Zugzwang bringen zu lassen. Bauchgefühle ohne Erfahrungsgrundlage sind etwas für Gläubige, nicht aber für den Skeptiker und Agnostiker.

Sisyphos liebt seinen Stein. Was dem Sisyphos sein Stein, ist dem Skeptiker der Widerstand gegen Anmaßungen.

## Quellenhinweise

Dass die von uns als ordentlich wahrgenommene Mathematik in ihrer Geschichte auch ziemlich unordentliche Phasen durchlaufen hat, und dass solche Phasen großen Einfluss auf die Organisation unseres Lebens hatten, zeigt die Entstehung der Infinitesimalrechnung, beschrieben von Amir Alexander in „Infinitesimal. How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World“ (2014).

Neben dem Buch „Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks – Eine Reise durch die Geschichte der Mathematik“ von Keith Devlins (2009) habe ich für die Darstellung des abgebrochenen Spiels noch Aufzeichnungen von Paul-Louis Hennequin von der Universität Blaise Pascal in Clermont-Ferrand aus dem Jahre 2005 zu Rate gezogen: *„Calculer des probabilités avec Blaise Pascal“*. Die entscheidende Passage des Briefes Pascals an Fermat vom 29. Juli 1654 habe ich in der Schrift *„Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von 1654 bis 1718“* von Daniel Brönnimann vom 24. September 2001 gefunden. Darin ist eine Passage abgedruckt, in der Pascal seine Methode ganz einfach und klar beschreibt. Beide Schriften sind im Internet verfügbar.

Peter L. Bernstein stellt in seinem Buch *„Against the Gods“* (1996) die Entdeckung Pascals und Fermats und deren Einfluss auf die moderne Risikoanalyse in einen größeren geschichtlichen Zusammenhang. Eine Neubelebung des induktiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs und des Indifferenzprinzips unternehmen Rudolf Carnap und Wolfgang Stegmüller in ihrem Werk *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit* aus dem Jahr 1959. Demselben Thema widmet sich Georg Pólya in seinem auf Schulniveau gehaltenen zweibändigen Werk *Mathematik und plausibles Schließen* (1962/1963).

Die Qualen des Charles Darwin haben Spuren in seinem Hauptwerk *Über die Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl* von 1859 hinterlassen. Eine prägnante Darstellung des Lebens und Wirkens von Charles Darwin bietet Barbara Continenza im Themenheft zum Darwin-Jahr (Spektrum der Wissenschaft 1/2009).

Die agnostizistische Skala und Zitate zu Thomas Henry Huxley habe ich im Buch „The God Delusion“ (2006, deutsch: „Der Gotteswahn“) von Richard Dawkins gefunden.

Hinsichtlich der drei Dimensionen des Risikos – Technik, Psychologie und Soziologie – habe ich Darstellungen aus meinem Buch zu den *Grundlagen des Qualitäts- und Risikomanagements* übernommen. Es ist (in leicht überarbeiteter Form) im Netz frei zugänglich.

Angaben zu den Bildern: Notre-Dame in Reims (Eigenes Bild, 2009). Momentary Monument (Lara Favaretto, dOCUMENTA (13), 2012). Soldaten beim Würfelspiel (Pieter Quast zwischen 1630 und 1647). Schiffbruch (William Turner, 1805).