

# >> Die Mathematik hinter den Tönen >>

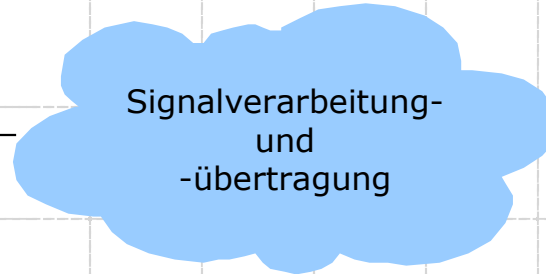
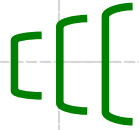
**Fuldaer Brückenkurs „Mathematik“**

**Sebastian Wendt**

# Schallwandlung

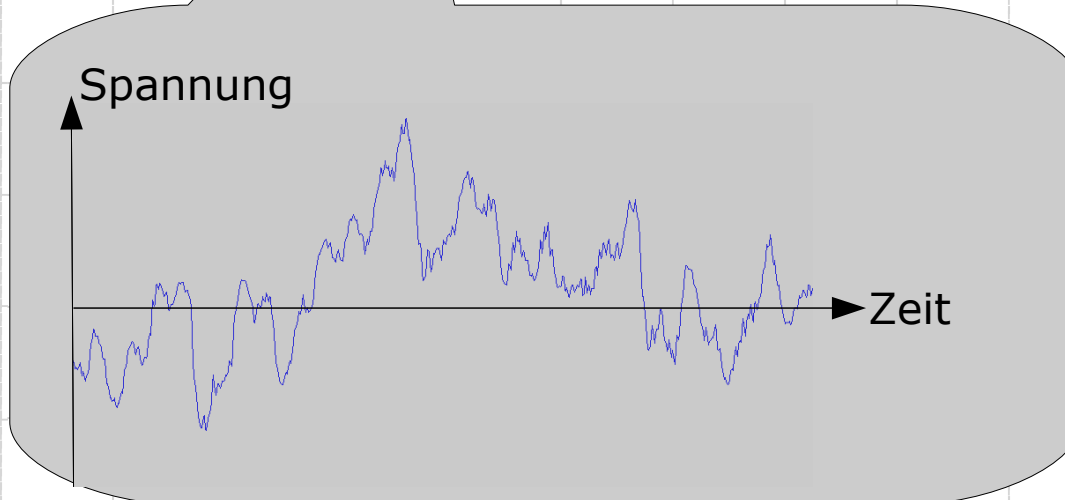
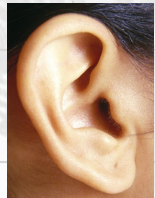
Schall, Töne, Musik => Luftdruckänderungen

Ein Mikrofon wandelt Luftdruckänderungen in Spannungsänderungen.



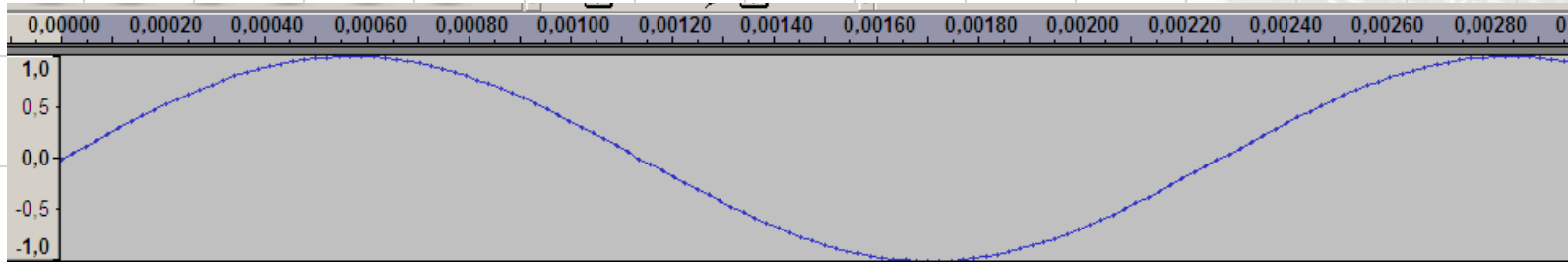
Ein Lautsprecher wandelt elektrische Signale in Luftdruckänderungen.

Lautsprecher



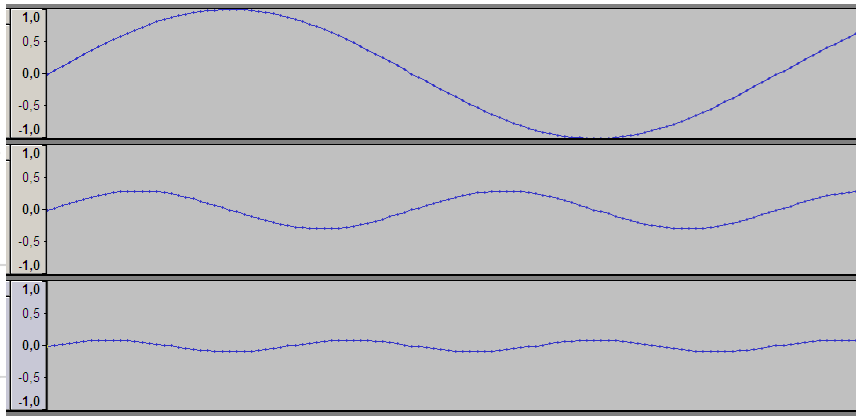
Die Wandlung in elektr. Signale ermöglicht die einfache Verarbeitung und Übertragung der Musik.

- Ton = periodische Druckänderung -> periodisches elektrisches Signal
- Kammerton A = Sinusschwingung mit Frequenz von 440 Hz



- Warum klingen Instrumente oder auch menschliche Stimmen unterschiedlich, obwohl sie den gleichen Ton spielen ?
  - => Oberwellen = Schwingungen mit vielfacher Frequenz des Grundtons
  - => Verhältnis der Oberwellenamplitude zum Grundton bestimmt Klangfarbe

# Frequenzdarstellung / Spektrum West



440 Hz

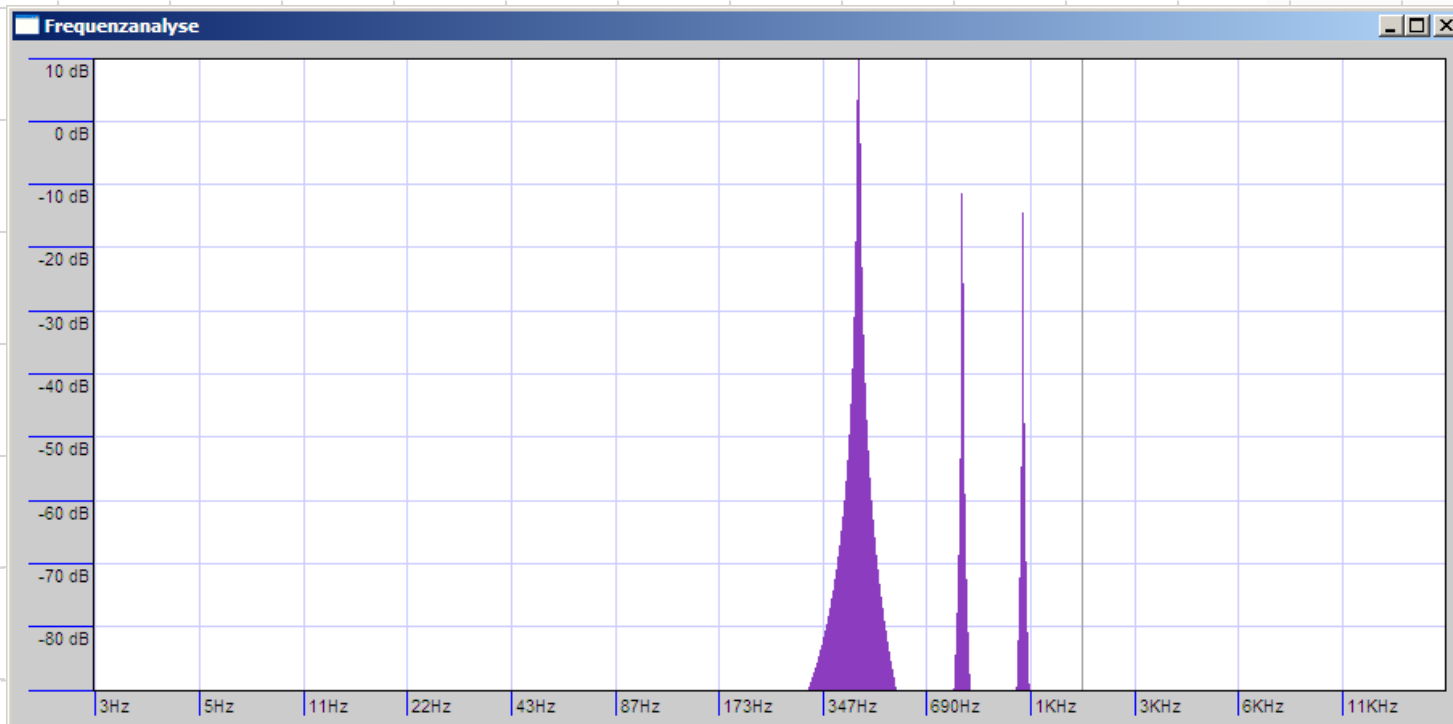
880 Hz

1320 Hz

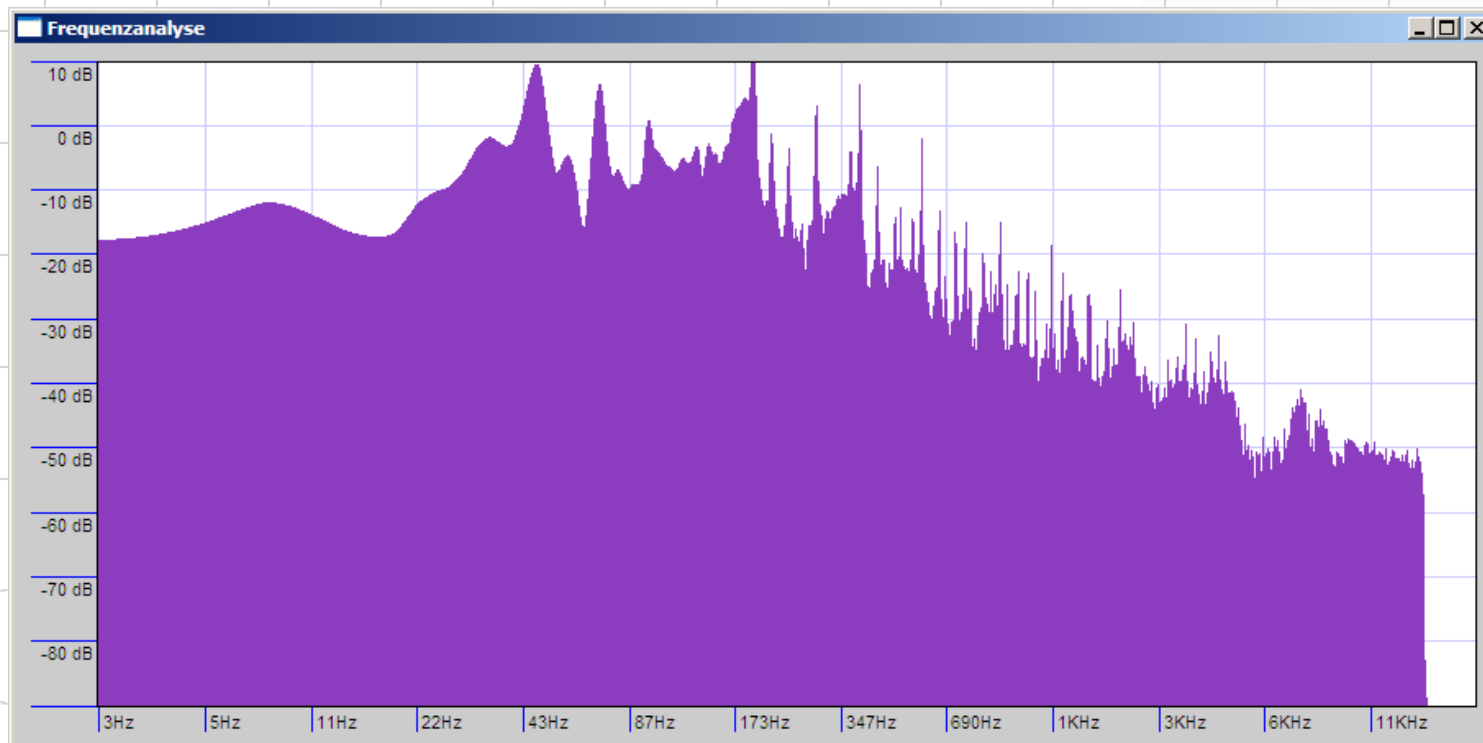
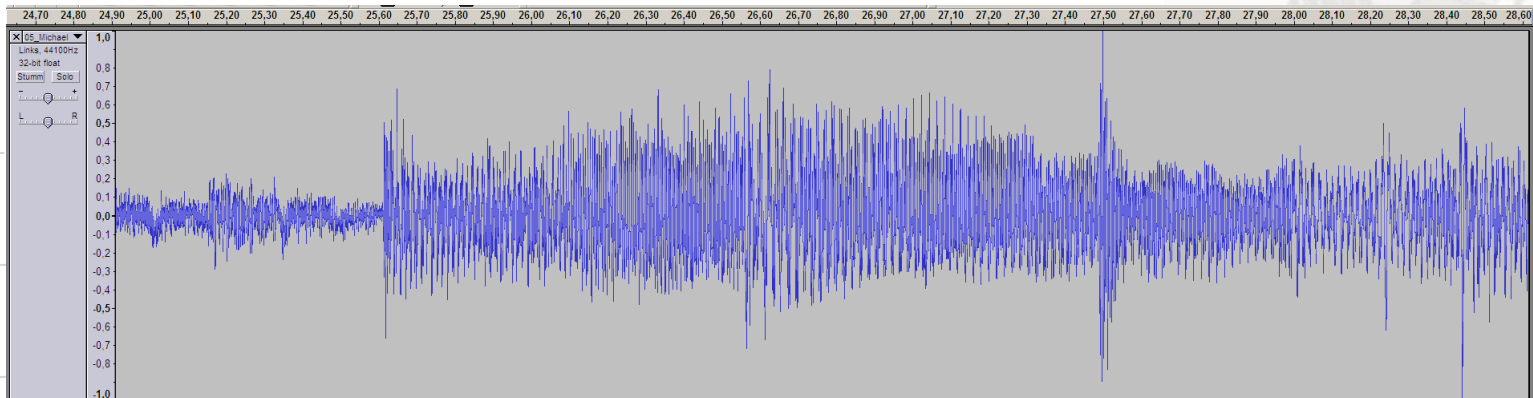
Zeitliche Darstellung

Fourier-  
Transformation

Spektrum



# Musik in Zeit- und Spektraldarstellung

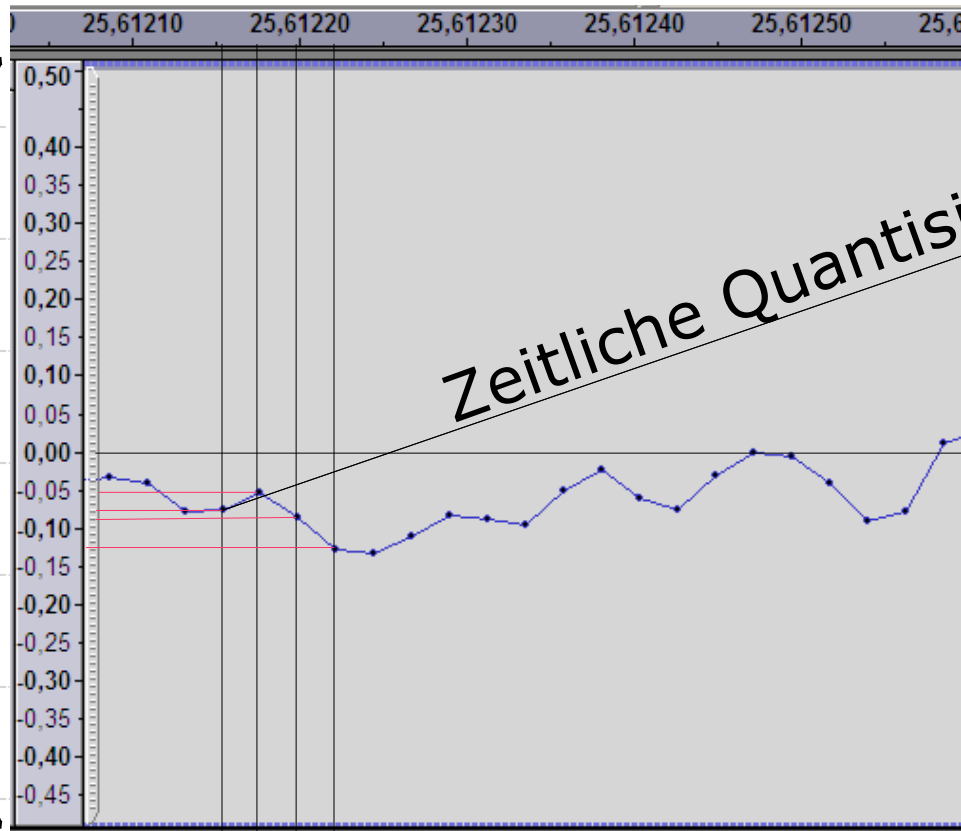


- Was kann man mit einem elektrischen Musiksignal anstellen ?

- |   |                                  |                                 |
|---|----------------------------------|---------------------------------|
| • Signal verstärken / abschwächen               | -> Audio-Verstärker              | } Analoge<br>Signalverarbeitung |
| • Bestimmte Frequenzen verstärken / abschwächen | -> Equalizer /<br>Frequenzweiche |                                 |
| • Signal übertragen (modulieren)                | -> Radio                         |                                 |
| • Signal speichern und wiedergewinnen           | -> Kassettenspieler              |                                 |

- Und weiter ?

- Die digitale Signalverarbeitung ermöglicht heute neue Verfahren, die mit analoger Signalverarbeitung zu aufwändig oder gar unmöglich sind.
- Beispiele erweiterter, digitaler Signalverarbeitung:  
MP3 & Co, Echo- und -Rauschunterdrückung im Handy, Surround Sound, Stimmenanalyse, Spracherkennung, Sprachsynthese (Text-to-Speech)
- Grundlage für die Verarbeitungsalgorithmik: Mathematik !
- Notwendigkeit: Musiksignal muss in ein „Zahlenformat“ gewandelt werden  
-> Analog-Digital-Wandlung -> Quantisierung



+0,5V  
bis  
-0,5V

Zeitliche Quantisierung

- 0.073542V
- 0.05012V
- 0.08149723343V
- 0.13456535643V
- ...

Abtast-  
intervall

Länge des Abtastintervalls:  
Nyquist-Kriterium -> Mathematik !

**Elektr. Wertebereich** z.B.

+0,512V

bis

-0,512V

mit beliebig vielen  
Zwischenwerten

-> analog

-0.073542V

-0.05012V

-0.08149723343V

-0.13456535643V

...

**Digitaler Wertebereich** z.B.

512

bis

-512

mit 1024  
Zwischenwerten

-> digital(10 Bit)

-7

-5

-8

-13

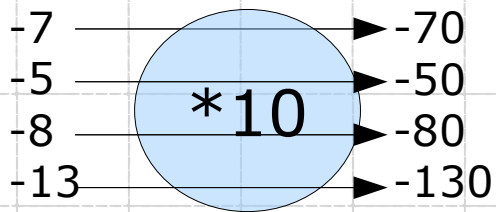
...

Quantisierung



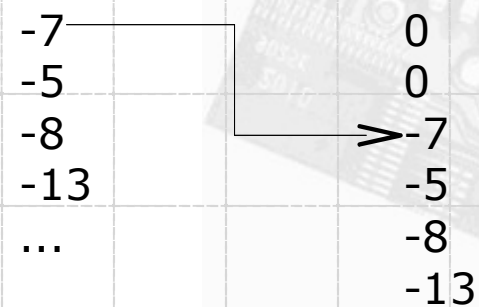


## Signal verstärken



```
...  
for (i=0; i<Anzahl; i++)  
{  
    s[i] = s[i] * 10;  
}
```

## Signal verzögern



```
...  
r[0]=0; r[1]=0;  
for (i=0; i<Anzahl; i++)  
{  
    r[i+2] = s[i];  
}
```

## Signal mischen

<u>S1</u>	+	<u>S2</u>	=	<u>R</u>
-7		20		13
-5		9		4
-8		12		4
-13		-5		-18

```
...  
for (i=0; i<Anzahl; i++)  
{  
    r[i] = s1[i] + s2[i];  
}
```

## Einfache Karaoke

```
for (i=0; i<Anzahl; i++)  
{  
    r[i] = L[i] - R[i];  
}
```



Sänger in der Bühnenmitte  
 $d_1 = d_2$  -> gleiche Laufzeit  
des Schalls zum Mikro  
-> gleicher Amplitude

->  $d_1 - d_2 = 0$

Sänger ist nicht mehr zu hören !

Gitarrist rechts:

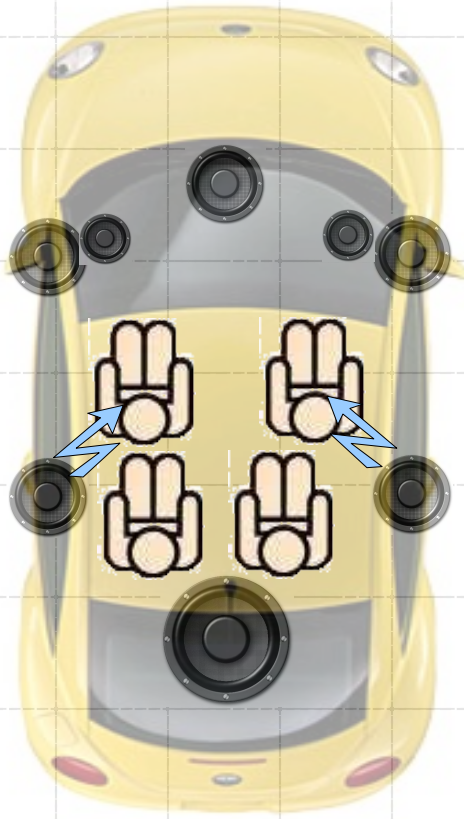
$D_1 \neq D_2$  -> Unterschiedliche  
Laufzeit und unter-  
schiedlicher Pegel



- **Ziel:** „Klangbühne auf Armaturenbrett für ALLE Passagiere

- **Ohne Signalverarbeitung**

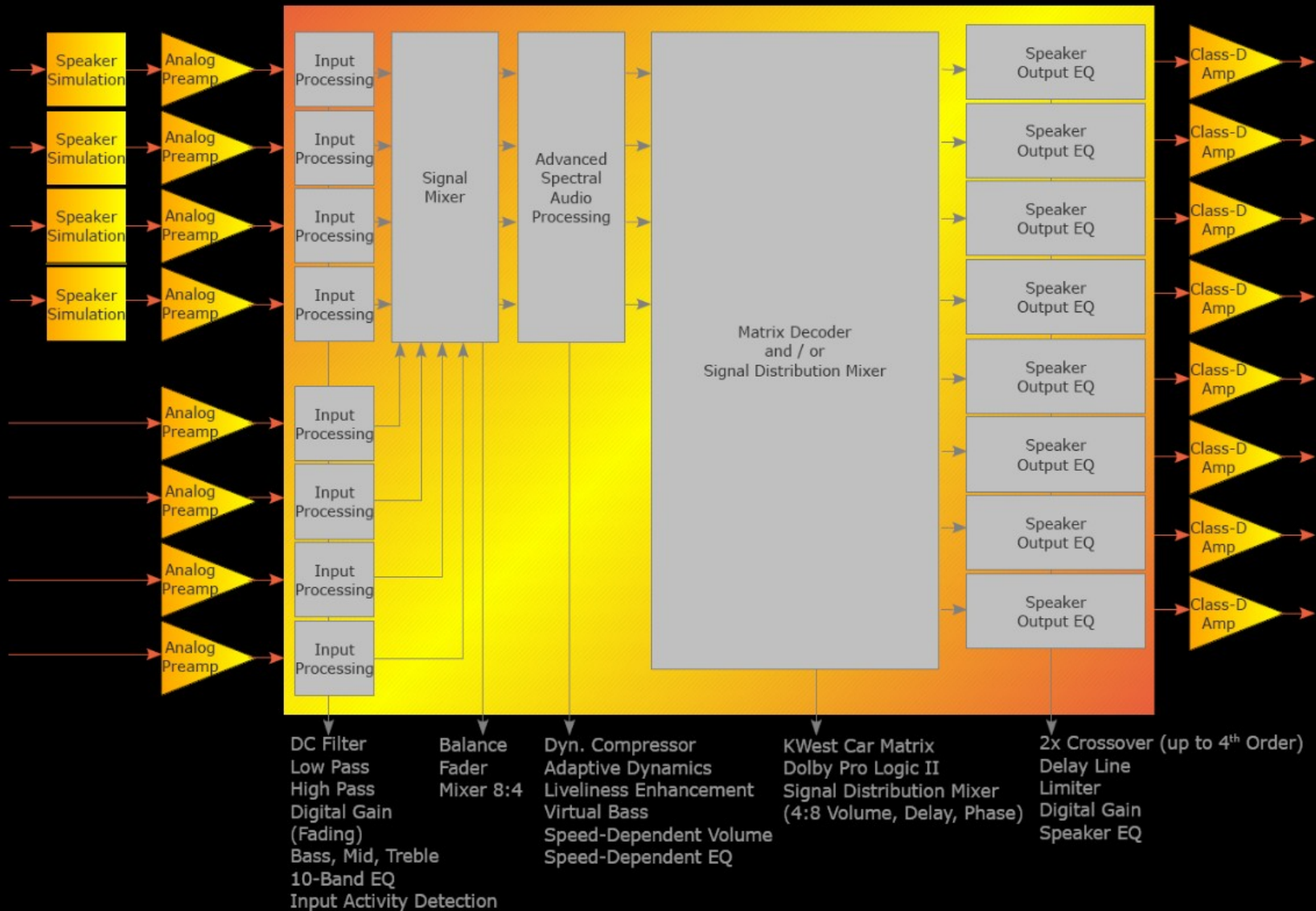
- Die vorderen Passagiere hören den Sänger auch von den hinteren Lautsprechern -> Verwirrung
- Die hinteren Passagieren hören die Musik nur dem Lautsprecher, der direkt neben ihnen ist -> Mono



- **Mit Signalverarbeitung**

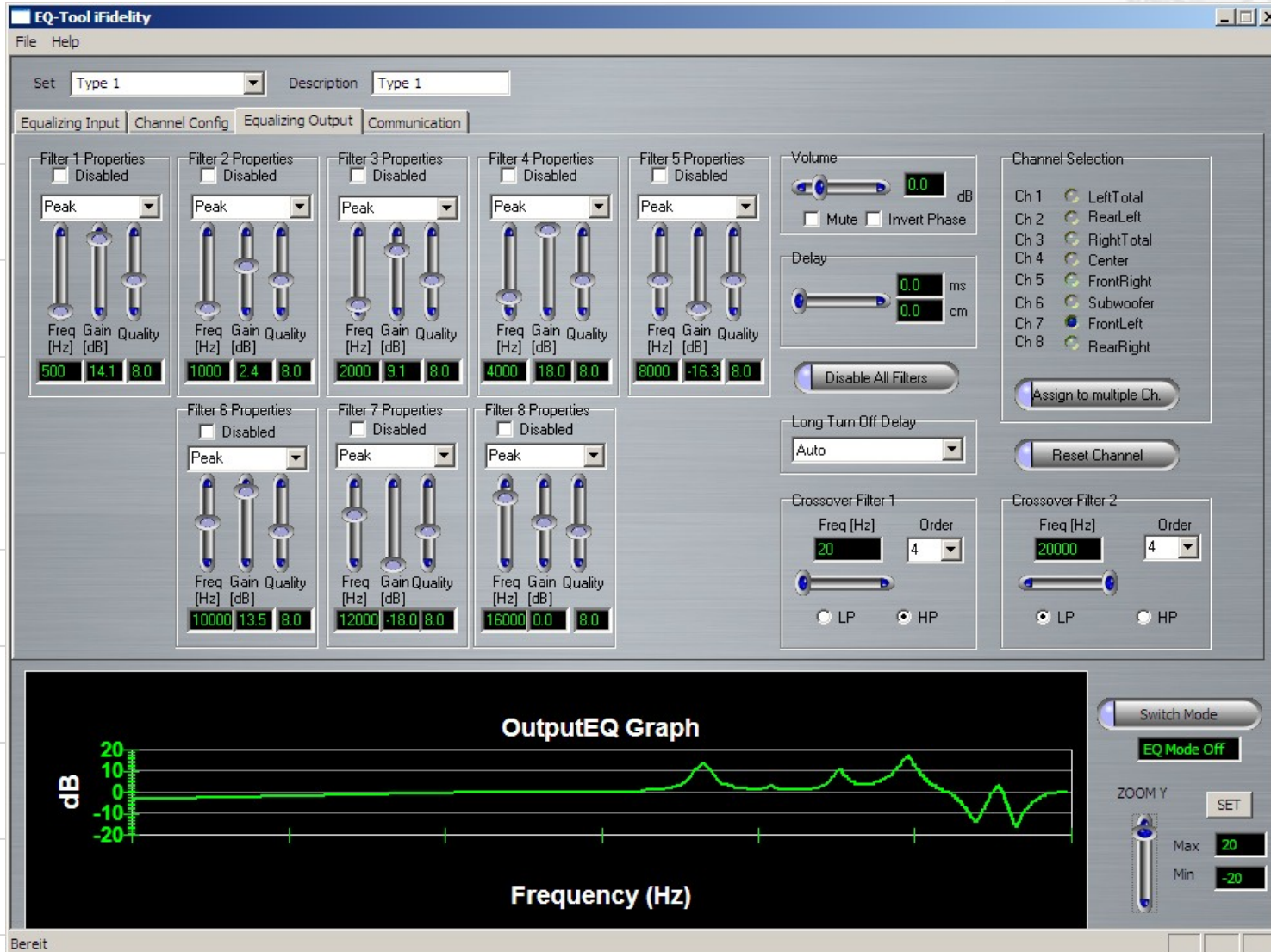
- Das Stereo-Musiksignal wird mittels Korrelation analysiert und in die einzelnen Schallquellen zerlegt
- Wiedergabe der Sänger und Soloinstrumente nur über die vorderen Lautsprecher, die hinteren Lautsprecher geben nur den „Background-Chor“, das Publikum und Schallreflexionen wieder.
- Die vorderen Passagiere hören keine störenden Sänger aus den hinteren Boxen mehr sondern sitzen mitten im Geschehen -> echter Surround-Klang
- Die hinteren Passagiere hören die Stimmen und Solo-Instrumente aus den vorderen Boxen -> breites Stereo bild

# Digitale Signalverarbeitung





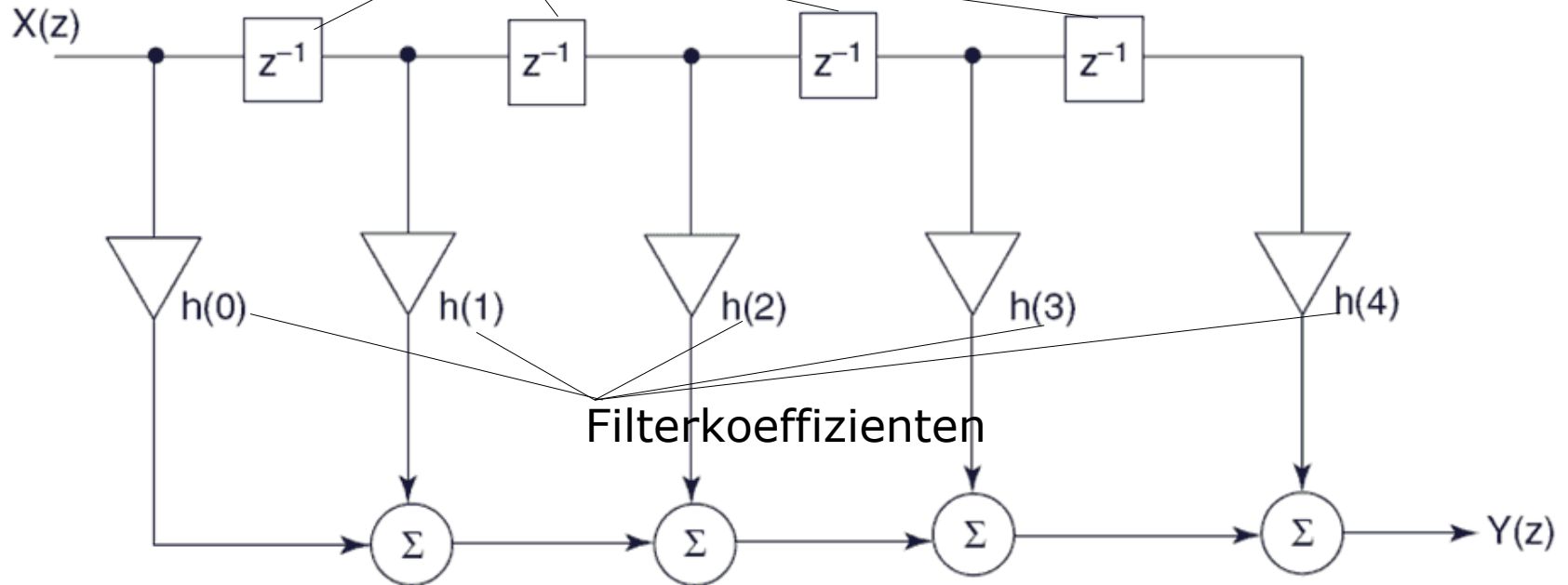
# Ansteuer-Tool



=> Einstellung der Filter in Echtzeit -> ohne Löten !

# Digitaler Filter (FIR 4. Ordnung)

Verzögerungsglieder (Delay Line)



$$Y(z) = h_0 * X(z) + h_1 * X(z^{-1}) + h_2 * X(z^{-2}) + h_3 * X(z^{-3}) + h_4 * X(z^{-4})$$

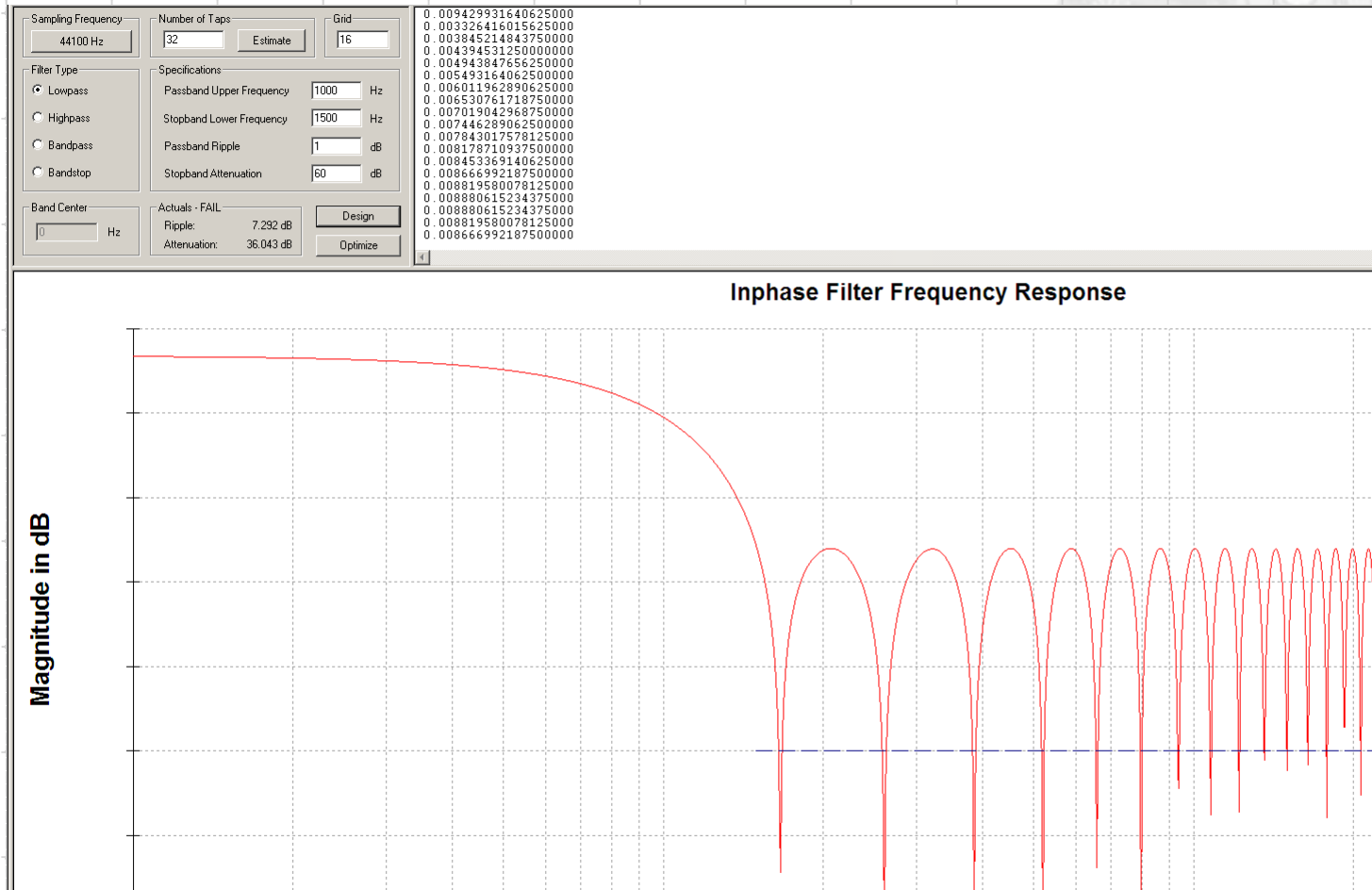
Durch die Wahl der Filterkoeffizienten werden die Filtereigenschaften charakterisiert !

-> Wie bestimmt man die Koeffizienten ?

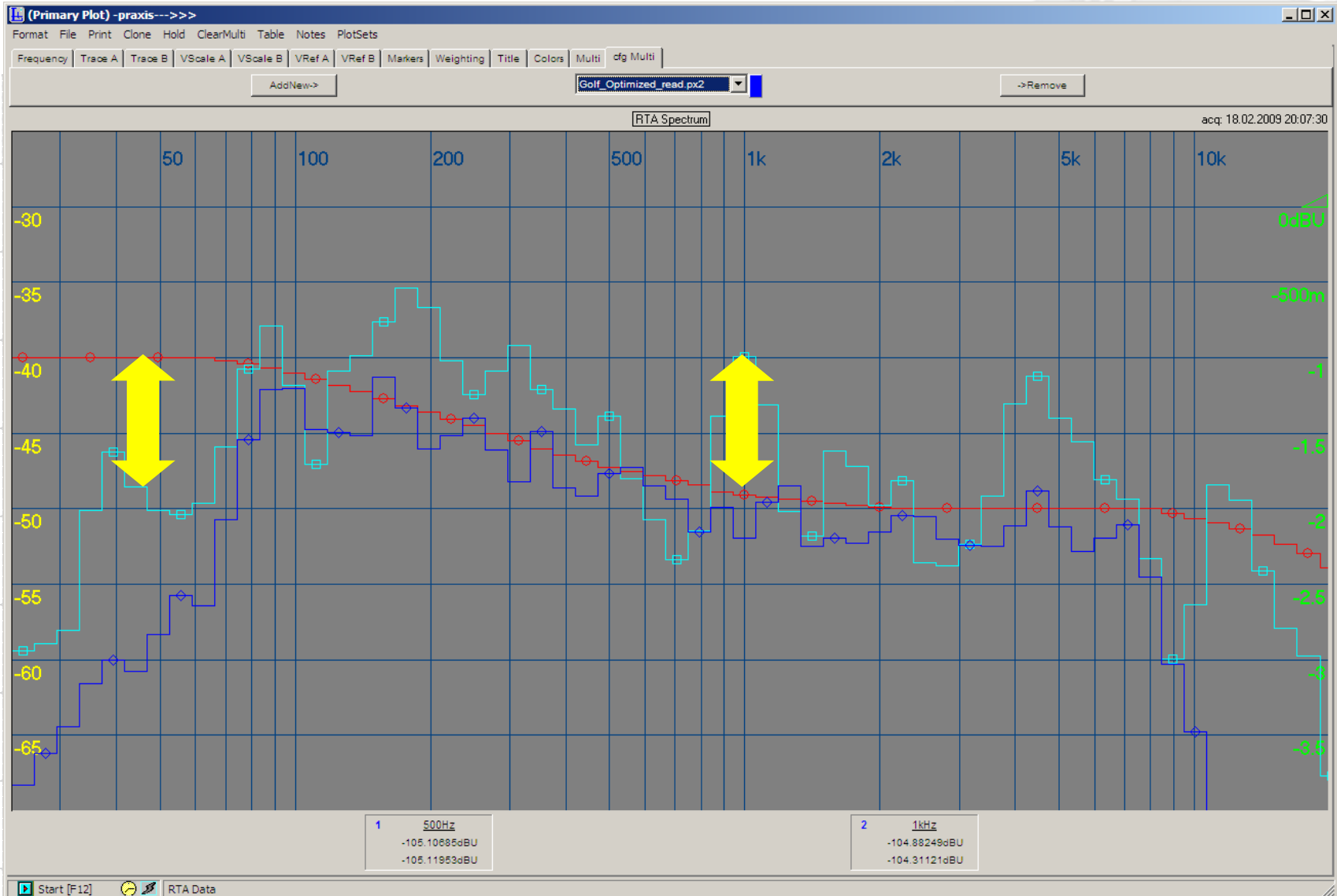
# Entwurfsverfahren



- Z.B. Parks-McLellan -> berechnet Koeffizienten aus „analogen“ Eingabeparametern wie Grenzfrequenz, Flankensteilheit, erlaubten Störungen etc.



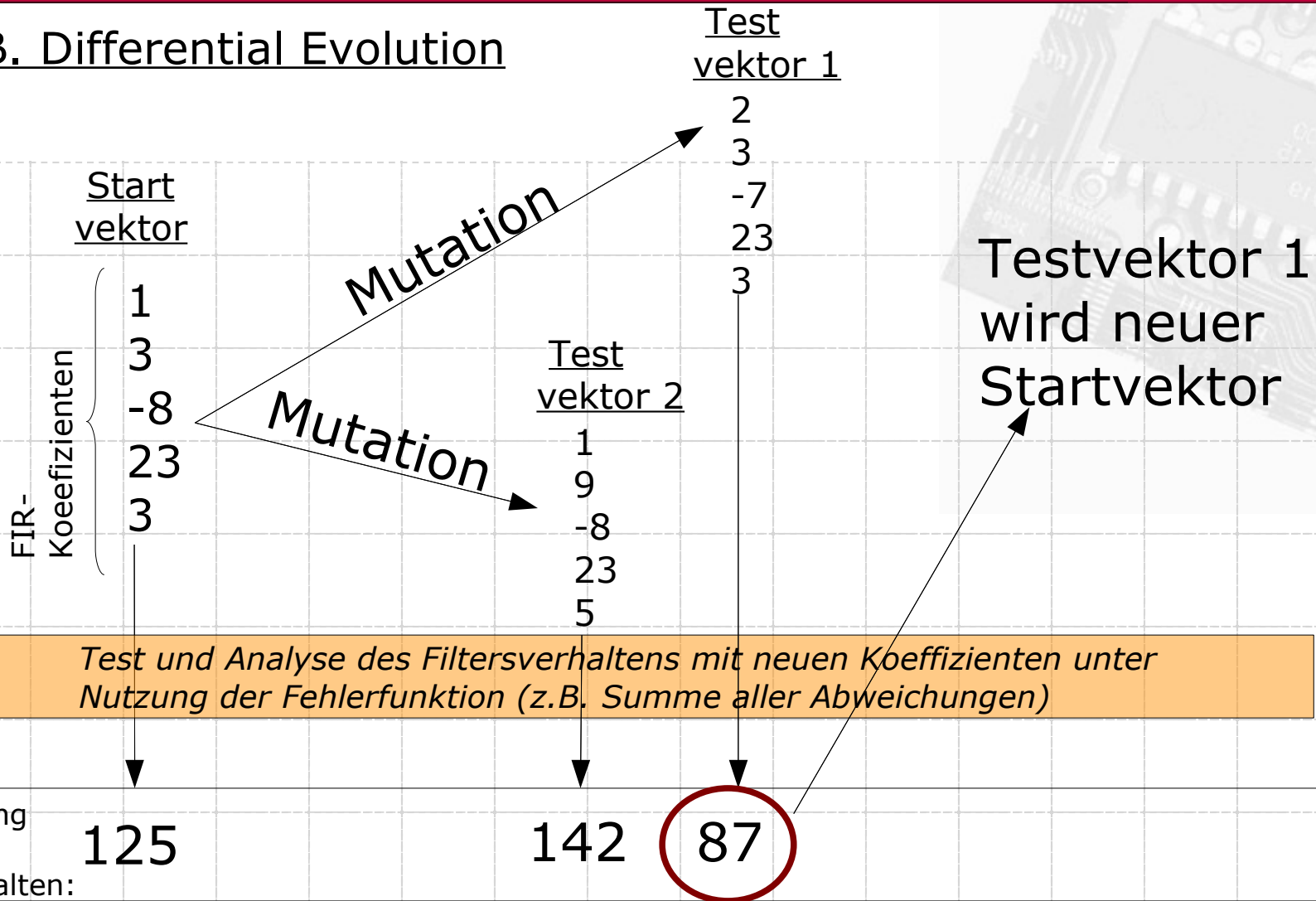
# Klangwiedergabe im Auto





# Entwurfsverfahren

- Z.B. Differential Evolution



**-> Verstärker kann seine optimalen Parameter selbst ermitteln -> automatisches Einmessen**

- Digitale Signalverarbeitung ist heute nicht mehr wegzudenken  
-> nicht nur in der Audio-Verarbeitung sondern in vielen Bereichen, wie z.B. Motorsteuerungen, Funkübertragung, Bildverbesserungsverfahren, medizinischen Geräten (3D-Ultraschall, CTG, ...), Digitalkameras
- Die Mathematik legte die Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung bereits in den 60 und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts
- Die digitale Signalverarbeitung ermöglicht es, neue mathematische Verfahren direkt anzuwenden, um Datenströme zu bearbeiten. Dies und die ständig wachsende Leistungsfähigkeit von Rechnersystemen ermöglichen immer weitere Innovationen, die unseren Alltag bestimmen.