Lineare Gleichungssysteme

Dr. H. Macholdt

1. Mai 2004

1 Motivation

Viele Probleme aus dem Bereich der Technik und der Naturwissenschaften stellen uns vor die Aufgabe mehrere unbekannte Größen gleichzeitig bestimmen zu müssen. In der Elektrotechnik führt die Behandlung von elektrischen Netzwerken, in denen die Teilspannungen oder die Teilströme gesucht sind zu einem linearen Gleichungssystem mit vielen Unbekannten.
In der Chemie kennen wir das Problem in einer wässrigen Lösung die Konzentration von zwei Stoffen simultan bestimmen zu müssen. Auch dies wird mit einem linearen Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gelöst.
In einem linearen Gleichungssystem sind die Unbekannten Größen (nennen wir sie z.B. x und y) nur in linearer Form, d.h. vor diesen Größen sind nur konstante Zahlen vorhanden. Ausdrücke wie x^2 oder $\exp(x)$ kommen nicht vor.
Betrachten wir einmal folgendes Beispiel:
Nehmen wir einmal an, Sie sollen aus einem $40cm$ langen Draht ein gleichschenkliges Dreieck biegen, so dass die Schenkel des Dreieckes dreimal so lang werden wie die Grundseite. Die Unbekannten Größen in dieser Aufgabe sind also die Länge der Dreiecksseiten, von denen zwei glücklicherweise gleich lang sind.
Ausgeschrieben als Formel lauten die Gleichungen für die Unbekannten Seiten s (wie Schenkel) und g (wie Grundseite) dann

$$\begin{aligned} 2 \cdot s + g &= 40 && \text{Umfang} = 40cm \\ &\mathit{und} \\ s &= 3 \cdot g && \text{Schenkel} = 3 \cdot \text{Grundseite} \end{aligned}$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen kann man verschiedene Verfahren benutzen, die wir an obigem Beispiel demonstrieren wollen. Zunächst einmal schaffen wir etwas Ordnung, in dem wir das Gleichungssystem in die sogenannte Normalform bringen. Das bedeutet lediglich, das wir alle unbekannten Größen (in diesem Fall s und g) auf die linke Seite der Gleichung und alle übrigen Zahlenwerte auf die rechte Seite der Gleichung bringen. Außerdem soll in jeder Gleichung die Reihenfolge der unbekannten Größen die gleiche sein.

Bei der ersten Gleichung ist dies schon der Fall, wir müssen also nur die zweite Gleichung etwas umformen und erhalten:

$$\begin{aligned} I) \qquad & 2 \cdot s + g = 40 \\ II) \qquad & s - 3 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Normalform eines linearen Gleichungssystemes mit zwei Unbekannten. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen, wann ein solches System lösbar oder unlösbar ist, oder ob es nun eine oder unendlich viele Lösungen geben kann. Zunächst mag die Aussage genügen, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmen sollte.

2 Das Einsetzungsverfahren

Das erste Lösungsverfahren nennt man Einsetzungsverfahren und läuft in folgenden Schritten ab:

1. Löse Gleichung I) nach einer Unbekannten auf.
2. Setze diesen Lösungsterm in die Gleichung II) ein
3. Löse diese Gleichung, die nur noch eine Variable hat.
4. Setze die Lösung in Gleichung I) ein und berechne die andere Unbekannte.

In unserem Beispiel führt der erste Schritt zu

$$Ia) \quad g = 40 - 2 \cdot s$$

Setzen wir diesen Term in Gleichung II) ein (das ist Schritt 2), erhalten wir

$$IIa) \quad s - 3 \cdot (40 - 2 \cdot s) = 0$$

Diese Gleichung enthält jetzt nur noch eine Unbekannte (in diesem Falle s), die wir nun berechnen können. Lösen wir zunächst die Klammer auf, ergibt sich:

$$IIb) \quad s - 120 + 6 \cdot s = 0$$

und weiter

$$IIc) \quad 7 \cdot s = 120$$

mit der Lösung

$$s = \frac{120}{7} = 17.143$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung Ia ein, so erhalten wir

$$g = 40 - 2 \cdot 17.143 = 5.714$$

Wenn wir dieses Ergebnis überprüfen, stellen wir in der Tat fest, dass die Seite s tatsächlich dreimal so groß wie die Seite g ist und die Summe der drei Seiten $17.143 + 17.143 + 5.741 = 40$ ebenfalls unserer Forderung entspricht.

3 Das Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden wir (wie der Name schon sagt) beide Gleichungen miteinander addieren (oder subtrahieren). Dazu verwenden wir folgende Schritte:

1. Multipliziere eine der beiden Gleichungen (oder beide) mit einer Zahl, so dass die Koeffizienten vor einer der Unbekannten in beiden Gleichungen gleich werden.
2. Subtrahiere die erhaltenen Gleichungen. Falls einer der gleichen Koeffizienten ein negatives Vorzeichen hat, addiere man beide Gleichungen.
3. Die nun entstandene Gleichung hat nur noch eine Unbekannte, die nun berechnet werden kann.
4. Setze die Lösung in Gleichung I) oder II) ein und berechne die andere Unbekannte.

Wenden wir dieses Rezept auf unser Beispiel an, indem wir wieder bei den beiden Ausgangsgleichungen beginnen.

$$\begin{aligned} I) \quad & 2 \cdot s + g = 40 \\ II) \quad & s - 3 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit dem Faktor 2 (Schritt 1) und subtrahieren dann beide Gleichungen voneinander.

$$\begin{aligned} I) \quad & 2 \cdot s + g = 40 \\ II) \quad & 2 \cdot s - 6 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Differenz:} \qquad 7 \cdot g = 40$$

Auch hier erhalten wir als Ergebnis $g = 40/7 = 5.714$.

4 Übungsaufgaben

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren.

1.

$$\begin{array}{rll} I) & 2 \cdot x - y = -5 & \text{Lösung:} \\ II) & -5 \cdot x + y = 8 & x = -1 \quad y = 3 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rll} I) & 14 \cdot x + 3 \cdot y = \frac{86}{7} & \text{Lösung:} \\ II) & -3 \cdot x + 8 \cdot y = \frac{68}{7} & x = \dfrac{4}{7} \quad y = \dfrac{10}{7} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rll} I) & 0.35x - 1.25y = 3.87 & \text{Lösung:} \\ II) & 3.5x + 2.8y = -12.3 & x \approx -0.8488 \quad y \approx -3.3333 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rll} I) & \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y = \frac{3}{4} & \text{Lösung:} \\ II) & \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{19}{10} & x = 2.5 \quad y = 1.5 \end{array}$$

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

1.

$$\begin{array}{rll} I) & 6 \cdot x - 8 \cdot y = -2 & \text{Lösung:} \\ II) & 5 \cdot x + 8 \cdot y = 101 & x = 9 \quad y = 7 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rll} I) & 5 \cdot x + 11 \cdot y = 32 & \text{Lösung:} \\ II) & 13 \cdot x + 11 \cdot y = 48 & x = 2 \quad y = 2 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rll} I) & 3 \cdot a - 4 \cdot b = -26 & \text{Lösung:} \\ II) & 12 \cdot a + 3 \cdot b = -9 & a = -2 \quad b = 5 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rll} I) & -15 \cdot u - 7 \cdot v = 23 & \text{Lösung:} \\ II) & -3 \cdot u + 14 \cdot v = 20 & u = -2 \quad v = 1 \end{array}$$

Zum Schluss noch einige Textaufgaben, die zu linearen Gleichungssystemen führen.

1. Die Summe zweier Zahlen ist 56. Addiert man zum doppelten Wert der ersten Zahl das dreifache der zweiten Zahl, so erhält man 128. Berechne das Zahlenpaar.

2. Der Umfang eines Rechtecks beträgt $144cm$. Verkürzt man die längere Seite um $4cm$ und die kürzere Seite um $5cm$, so beträgt der Umfang $126cm$. Welche Maße hatte das ursprüngliche Rechteck.

3. In einem mechanischen Uhrwerk wird ein großes Zahnrad von einem kleinen Zahnrad angetrieben. Wenn das kleine Rad 16 Umdrehungen gemacht hat, hat sich das große Rad nur 3-mal gedreht. Das kleine Rad hat 39 Zähne weniger als das große Zahnrad. Berechne die Anzahl der Zähne von beiden Rädern.

Lösungen:

1.

$$\begin{array}{rrl} I) & x + y = 56 & \text{Lösung:} \\ II) & 2 \cdot x + 3 \cdot y = 128 & x = 40 \quad y = 16 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rrl} I) & 2 \cdot x + 2 \cdot y = 144 & \text{Lösung:} \\ II) & 2 \cdot (x - 4) + 2 \cdot (y - 5) = 126 & \text{unendlich viele !} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rrl} I) & x = y - 39 & \text{Lösung:} \\ II) & 16 \cdot x = 3 \cdot y & x = 9 \quad y = 48 \end{array}$$