Bruchrechnung

1 Definition und grundlegende Eigenschaften

1.1 Was ist ein Bruch?

Ein ***Bruch*** ist ein Symbol der Form

$$\frac{a}{b},$$

bestehend aus einer oberen Zahl a, genannt ***Zähler***, einer unteren Zahl b, genannt ***Nenner***, und dazwischen dem ***Bruchstrich***. Eine andere (platzsparende) Schreibweise ist a/b.
Gesprochen wird der Bruch „a geteilt (oder dividiert) durch b“ oder kurz „a durch b“.

Das Symbol a/b steht für eine bestimmte Zahl x, die der ***Wert*** des Bruchs genannt wird, nämlich das Ergebnis der Division von a durch b oder, was dasselbe ist, die Lösung der Gleichung $b \cdot x = a$:

$$x = \frac{a}{b} \qquad \text{bedeutet das selbe wie} \qquad b \cdot x = a.$$

Man spricht auch von der ***Darstellung*** der Zahl x durch den Bruch a/b.

Beispiel 1) $\frac{6}{3} = 2$, denn $3 \cdot 2 = 6$.

Hieraus ersieht man unmittelbar, daß ein Bruch nur dann einen Sinn hat („definiert ist“), wenn sein Nenner nicht Null ist. Die Gleichung $0 \cdot x = a$ hat nämlich entweder überhaupt keine Lösung (im Fall $a \neq 0$), oder jede beliebige Zahl x ist Lösung (im Fall $a = 0$).

1.2 Erweitern und Kürzen

Zu jedem Bruch a/b gibt es unendlich viele weitere Brüche mit dem selben Wert, und zwar sind dies die Brüche der Form

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad \text{mit einer Zahl} \quad c \neq 0;$$

jede Lösung x der Gleichung $b \cdot x = a$ ist ja auch Lösung der Gleichung $(b \cdot c) \cdot x = a \cdot c$ und umgekehrt.

Den Übergang von $\frac{a}{b}$ zu $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ nennt man ***Erweitern*** von $\frac{a}{b}$ ***mit*** c;
den Übergang von $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ zu $\frac{a}{b}$ nennt man ***Kürzen*** von $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ ***durch*** c.
Kürzen durch c ist also nichts anderes als Erweitern mit $1/c$.

1.3 Gleichheit

Um zu prüfen, ob zwei gegebene Brüche den selben Wert haben, kann man versuchen, sie durch Kürzen oder Erweitern ineinander überzuführen.

Beispiel 2) $\frac{6}{34} = \frac{15}{85}$, denn $\frac{6}{34} = \frac{3 \cdot 2}{17 \cdot 2} = \frac{3}{17} = \frac{3 \cdot 5}{17 \cdot 5} = \frac{15}{85}$.

Ein anderer Test zweier Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{A}{B}$ auf Gleichheit besteht im „Multiplizieren über Kreuz“:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} \qquad \text{ist gleichbedeutend mit} \qquad a \cdot B = A \cdot b.$$

Beispiel 3) $\frac{6}{34} = \frac{15}{85}$, denn $6 \cdot 85 = 510 = 34 \cdot 15$.

1.4 Brüche aus ganzen Zahlen

Angenommen, die Zahl x läßt sich als Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner schreiben:

$$x = \frac{a}{b} \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$$

(man nennt x dann eine ***rationale*** Zahl). Wenn man diesen Bruch so weit kürzt, wie das im Rahmen einer ganzzahligen Rechnung möglich ist, und gegebenenfalls noch mit -1 erweitert, gelangt man zu einer Darstellung

$$x = \frac{m}{n} \qquad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},$$

die sich nicht weiter kürzen läßt, weil m und n ***teilerfremd*** sind.
Diese Darstellung von x ist **eindeutig**, d.h. unabhängig davon, wie der Kürzungsprozeß im einzelnen verlaufen ist.

Beispiel 4) $\dfrac{276}{3468} = \dfrac{138 \cdot 2}{1734 \cdot 2} = \dfrac{138}{1734} = \dfrac{69 \cdot 2}{867 \cdot 2} = \dfrac{69}{867} = \dfrac{23 \cdot 3}{289 \cdot 3} = \dfrac{23}{289}\,,$

und damit ist Schluß, denn 23 und 289 sind teilerfremd.

2 Rechenregeln

Mit Zahlen kann man **rechnen**, natürlich auch dann, wenn sie durch Brüche dargestellt sind. Die Frage ist nur, ob und wie man das Ergebnis einer Rechnung mit Brüchen wieder als Bruch darstellen kann.

2.1 Addition

Die Addition zweier Brüche, die den gleichen Nenner haben (***gleichnamig*** sind), ist kein Problem; hier werden einfach die Zähler addiert:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}\,.$$

Begründung: $x = a/b$ ist Lösung der Gleichung $b \cdot x = a$, und $y = c/b$ ist Lösung der Gleichung $b \cdot y = c$, also ist $b \cdot (x + y) = b \cdot x + b \cdot y = a + c$.
Zur Addition zweier beliebiger Brüche muß man diese zunächst gleichnamig machen („auf einen gemeinsamen Nenner bringen“), beispielsweise so:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} && \text{(Erweitern mit } d \text{ bzw. } b\text{)} \\ &= \frac{ad + bc}{bd} && \text{(gleiche Nenner: Addition der Zähler)} \end{aligned}$$

Als gemeinsamen Nenner kann man also in jedem Fall das Produkt der beiden Nenner nehmen. Manchmal kommt man aber auch mit weniger aus. Ob das so ist, sieht man, wenn man die Nenner der beiden zu addierenden Brüche in Faktoren zerlegt. Mit Faktoren, die sowieso schon in beiden Nennern vorkommen, braucht man nicht zu erweitern.

Beispiele.

5) Statt $\dfrac{5}{14} + \dfrac{2}{21} = \dfrac{5 \cdot 21 + 2 \cdot 14}{14 \cdot 21} = \dfrac{133}{294}$ rechnet man besser

$$\frac{5}{14} + \frac{2}{21} = \frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{19}{42}\,.$$

6) Die Brüche $\dfrac{u}{u^2-v^2}$ und $\dfrac{v-u}{u^2+2uv+v^2}$ sind zu addieren. Die Rechnung

$$\begin{aligned}\frac{u}{u^2-v^2}+\frac{v-u}{u^2+2uv+v^2} &= \frac{u\cdot(u^2+2uv+v^2)}{(u^2-v^2)\cdot(u^2+2uv+v^2)}+\frac{(v-u)\cdot(u^2-v^2)}{(u^2-v^2)\cdot(u^2+2uv+v^2)}\\ &= \frac{u\cdot(u^2+2uv+v^2)+(v-u)\cdot(u^2-v^2)}{(u^2-v^2)\cdot(u^2+2uv+v^2)}\\ &= \frac{3u^2v+2uv^2-v^3}{u^4+2u^3v-2v^3u-v^4}\end{aligned}$$

ist zwar korrekt, aber ziemlich ungeschickt. Der erhaltene Bruch ist so kompliziert, daß man die Möglichkeit zum Kürzen nicht erkennt. Besser rechnet man so:

$$\begin{aligned}\frac{u}{u^2-v^2}+\frac{v-u}{u^2+2uv+v^2} &= \frac{u}{(u-v)(u+v)}+\frac{v-u}{(u+v)^2}\\ &= \frac{u(u+v)}{(u-v)(u+v)^2}+\frac{(v-u)(u-v)}{(u-v)(u+v)^2}\\ &= \frac{u(u+v)-(u-v)^2}{(u-v)(u+v)^2}\\ &= \frac{(3u-v)v}{(u-v)(u+v)^2}\,.\end{aligned}$$

2.2 Subtraktion

Die Subtraktion von Brüchen wird auf die Addition zurückgeführt durch

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \;=\; \frac{a}{b}+\frac{-c}{d}\,.$$

2.3 Multiplikation

Man multipliziert einen Bruch mit einer Zahl, indem man seinen Zähler mit dieser Zahl multipliziert:

$$\frac{a}{b}\cdot y \;=\; \frac{a\cdot y}{b}\,.$$

Begründung: Ist $x=\dfrac{a}{b}$, also $b\cdot x=a$, so ist $b\cdot(x\cdot y)=a\cdot y$, also $x\cdot y=\dfrac{a\cdot y}{b}$.

Ist die Zahl $y=\dfrac{c}{d}$ selbst ein Bruch, so folgt daraus durch Erweitern mit d:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \;=\; \frac{a\cdot\frac{c}{d}}{b} \;=\; \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Damit hat man die

Regel: Man multipliziert zwei Brüche miteinander, indem man ihre Zähler und ihre Nenner jeweils miteinander multipliziert.

2.4 Division

Als ***Kehrwert*** oder ***reziproken Wert*** einer Zahl $y\neq 0$ bezeichnet man den Bruch $\dfrac{1}{y}$.

Er ist charakterisiert durch die Gleichung $y\cdot\dfrac{1}{y}=1$. Es gelten die Regeln

$$x\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{y}=\frac{a}{b\cdot y}\,,$$

in Worten:

- ▷ Multiplikation mit $\dfrac{1}{y}$ bewirkt das selbe wie Division durch y.
- ▷ Man dividiert einen Bruch durch eine Zahl, indem man seinen Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Ist die Zahl $y = \dfrac{c}{d}$ ein Bruch, so gewinnt man ihren Kehrwert, indem man die Rollen von Zähler und Nenner vertauscht: $\dfrac{1}{c/d} = \dfrac{d}{c}$ nach Erweitern mit d.

Für die Division zweier Brüche gilt demnach

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}\,.$$

3 Aufgaben

1. Berechnen Sie $5 \cdot \dfrac{7}{12} + 1 \cdot \dfrac{41}{72} + 2 \cdot \dfrac{17}{24} + 9 \cdot \dfrac{5}{9}$.

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

   (a) $\dfrac{b+5c-a}{6} - \dfrac{3a-7b+6c}{4} + \dfrac{4a-5b+7c}{3}$;

   (b) $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{3a+2} - \dfrac{3}{a+1}$;

   (c) $\left(\dfrac{a}{3b} + \dfrac{3b}{a}\right) \cdot 3ab$;

   (d) $\left(\dfrac{a}{2b} - \dfrac{2b}{a}\right) : \dfrac{a}{a+2b}$;

   (e) $1 - \dfrac{1}{1 - a\dfrac{1}{1-\frac{b}{a}}}$;

   (f) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b}}$.

3. Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man mit $n!$ (gesprochen „***n* Fakultät**“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

   $$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n\,, \quad \text{zum Beispiel} \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040\,.$$

   Berechnen Sie

   (a) $\dfrac{10!}{8!}$; (b) $\dfrac{13!}{7! \cdot 8!}$; (c) $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{2}{7!} + \dfrac{3}{8!}$; (d) $\dfrac{6!+8!}{5!+7!}$.