Ganze Zahlen

1 Einleitung

Als ***ganze Zahlen*** bezeichnet man

- ▷ die ***natürlichen Zahlen*** $1, 2, 3, 4, \ldots,$
- ▷ die ***Null*** 0
- ▷ und die ***negativen ganzen Zahlen*** $-1, -2, -3, -4, \ldots$

Wir verabreden die Abkürzungen

- ▷ $\mathbb{Z} := \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der ganzen Zahlen,
- ▷ $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der natürlichen Zahlen sowie
- ▷ $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen,

so daß wir statt „a ist eine ganze Zahl“ oder „a ist ganzzahlig“ kurz „$a \in \mathbb{Z}$“ schreiben können.

Eine Besonderheit der ganzen Zahlen gegenüber den anderen gebräuchlichen Zahlbereichen ist der Umstand, daß die Division hier nur manchmal durchführbar ist, oder mit anderen Worten, daß nur manche der Gleichungen $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzen.

2 Teiler

2.1 Definition

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
a heißt ein ***Teiler*** von b, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt derart, daß $a \cdot c = b$ ist, oder, anders ausgedrückt, wenn die Division von b durch a ohne Rest aufgeht.
b heißt dann durch a ***teilbar*** oder ein ***Vielfaches*** von a.

Beispiele.

1) 18 ist durch 3 teilbar, denn $3 \cdot 6 = 18$.
2) 20 ist nicht durch 3 teilbar, denn 20 läßt bei Division durch 3 den Rest 2: $20 = 3 \cdot 6 + 2$.
3) Sämtliche Teiler von 4 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
4) Jede Zahl b hat die „trivialen“ Teiler ± 1 und $\pm b$: $1 \cdot b = b, \quad (-1) \cdot (-b) = b$.
5) Jede Zahl ist Teiler von 0: $a \cdot 0 = 0$.
6) Nur 0 ist durch 0 teilbar: $0 \cdot c = b$ nur für $b = 0$.

Ist $b \neq 0$, so ist jeder Teiler von b dem Betrage nach höchstens so groß wie b.
Diese Beobachtung hilft, die Suche nach Teilern einer Zahl einzugrenzen; insbesondere folgt, daß jede von Null verschiedene ganze Zahl nur endlich viele Teiler hat.

Da bei der Frage, ob eine Zahl Teiler einer anderen ist, die Vorzeichen offenbar keine Rolle spielen, und da die Verhältnisse bezüglich der Null auch nicht sehr interessant sind, kann man die Betrachtung auf natürliche Zahlen beschränken.

2.2 Teilbarkeitsregeln

Wohlgemerkt: Ob eine Zahl Teiler einer anderen Zahl ist, hängt **nicht** davon ab, in welchem Zahlensystem (dezimal, binär o.a.) diese Zahlen dargestellt sind.
Die folgenden Teilbarkeitsregeln gelten aber speziell für ganze Zahlen in Dezimaldarstellung:

- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar (also $0, 2, 4, 6$ oder 8) ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die von ihren letzten beiden Stellen gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist (siehe dort).
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die von ihren letzten drei Stellen gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 ist.
- ▷ Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme (die Summe ihrer mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Ziffern) durch 11 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit durch 7 gibt es keine brauchbare Regel.

Beispiel 7) Die Zahl 108636 ist durch 4 teilbar, denn 36 ist durch 4 teilbar.
Sie ist durch 3 teilbar, denn $1 + 0 + 8 + 6 + 3 + 6 = 24$ ist durch 3 teilbar.
Sie ist nicht durch 9 teilbar, denn 24 ist nicht durch 9 teilbar.
Sie ist ferner durch 11 teilbar, denn $1 - 0 + 8 - 6 + 3 - 6 = 0$ ist durch 11 teilbar.

3 Primzahlen

3.1 Was ist eine Primzahl?

Es sei $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.
Es kann sein, daß n sich als ein Produkt zweier kleinerer natürlicher Zahlen schreiben läßt:

$$n = a \cdot b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{N},\ a, b < n.$$

Dann nennt man n ***zusammengesetzt***.
Es kann aber auch sein, daß n keine solche Zerlegung zuläßt; dann heißt n ***prim*** oder eine ***Primzahl***.
Eine Primzahl ist also dadurch charakterisiert, daß die einzigen Möglichkeiten, sie als ein Produkt von zwei natürlichen Zahlen zu schreiben, gegeben sind durch $n = 1 \cdot n$ und $n = n \cdot 1$.
Mit anderen Worten: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl > 1, die außer 1 und sich selbst keine positiven Teiler besitzt.

Wie man sieht, wird die 1 weder zu den Primzahlen noch zu den zusammengesetzten Zahlen gerechnet.

Wir bezeichnen Primzahlen meistens mit dem Buchstaben p.

Beispiel 8) Unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 10$ sind $4 = 2 \cdot 2,\ 6 = 2 \cdot 3,\ 8 = 2 \cdot 4,\ 9 = 3 \cdot 3$ und $10 = 2 \cdot 5$ zusammengesetzt, und $2, 3, 5, 7$ sind prim.

3.2 Primfaktorzerlegung

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n > 1$. Damit verfahren wir folgendermaßen:

Wir prüfen, ob n sich in ein Produkt $a \cdot b$ aus kleineren natürlichen Zahlen zerlegen läßt. Ist dies nicht möglich, dann ist n eine Primzahl, und wir sind fertig. Im anderen Fall untersuchen wir die Faktoren a und b daraufhin, ob sie sich in der beschriebenen Weise weiter zerlegen lassen. Dann nehmen wir uns deren Faktoren vor und so weiter.
Da die Faktoren dabei immer kleiner werden, kann dieser Prozeß nicht ewig weiter gehen, sondern muß irgendwann zu einem Ende kommen, und zwar dadurch, daß alle gefundenen Faktoren Primzahlen sind.
Damit haben wir n als ein Produkt von Primzahlen dargestellt:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k \quad \text{mit Primzahlen } p_1, \ldots, p_k .$$

Bemerkenswerterweise ist diese ***Primfaktorzerlegung*** von n – abgesehen natürlich von der Reihenfolge der Faktoren – **eindeutig**, d.h., wie auch immer der obige Zerlegungsprozeß im einzelnen verläuft, stets bekommt man die selben Primzahlen in der jeweils selben Anzahl heraus.

Beispiel 9) $1716 = 2 \cdot 858 = 2 \cdot 2 \cdot 429 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 143 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$
oder $1716 = 26 \cdot 66 = 2 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Ordnet man die Primfaktoren jetzt noch der Größe nach und faßt gleiche Primzahlen zu Potenzen zusammen, so gelangt man zur sogenannten ***kanonischen Zerlegung*** von n:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m} \quad \text{mit Primzahlen } p_1 < p_2 < \ldots < p_m \text{ sowie } a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}.$$

Diese ist durch n vollständig festgelegt.

Beispiel 10) Die kanonische Zerlegung von 1716 ist $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$.

Bemerkung. Die Primzahlen sind also bezüglich der Multiplikation die kleinsten Bausteine – sozusagen die Atome – der natürlichen Zahlen. Der multiplikative Aufbau von $\mathbb{N}$ erweist sich damit als wesentlich komplizierter (und interessanter) als der additive, bei dem man aus einem einzigen Baustein, nämlich der 1, alles durch fortgesetzte Addition erhält.

3.3 Wie erkennt man eine Primzahl?

Wie kann man von einer gegebenen natürlichen Zahl $n > 1$ feststellen, ob sie eine Primzahl ist?

Die einfachste Methode für den Hausgebrauch ist das ***Probedividieren***.

In seiner primitivsten Form besteht es einfach darin, von jeder natürlichen Zahl zwischen 2 und $n-1$ zu prüfen, ob sie ein Teiler von n ist. Wird dabei kein Teiler gefunden, dann ist n eine Primzahl.
Bei genauerem Hinsehen stellt man fest, daß man sich einen Großteil dieser Arbeit sparen kann. Erstens braucht man nämlich nur die Zahlen zwischen 2 und $\sqrt{n}$ zu überprüfen, und zweitens unter diesen auch nur die Primzahlen. Dies sieht man folgendermaßen ein:

Bei einer zusammengesetzten Zahl $n = a \cdot b$ mit $a, b < n$ können nicht beide Faktoren a und b größer als $\sqrt{n}$ sein, sonst wäre ihr Produkt ja größer als n. Also ist, sagen wir, $a \leq \sqrt{n}$.
Andererseits ist $a > 1$ (im Falle $a = 1$ wäre ja $b = n$); folglich ist a durch eine gewisse Primzahl p teilbar (eventuell sogar $a = p$). p ist dann auch ein Teiler von n, und $p \leq a \leq \sqrt{n}$.

Wir haben damit gezeigt, daß jede zusammengesetzte Zahl n durch wenigstens eine Primzahl $p \leq \sqrt{n}$ teilbar ist, oder, andersherum formuliert:

▷ Die natürliche Zahl $n > 1$ sei durch keine Primzahl $p \le \sqrt{n}$ teilbar.
Dann ist n eine Primzahl.

Beispiele.

11) 2 und 3 sind Primzahlen, denn sie sind durch keine Primzahlen $p \le \sqrt{2}$ bzw. $p \le \sqrt{3}$ teilbar (weil es nämlich gar keine gibt).

12) 5 ist eine Primzahl, denn die einzige Primzahl $p \le \sqrt{5}$ ist $p = 2$, und durch die ist 5 nicht teilbar.

13) 113 ist eine Primzahl, denn die Primzahlen $p \le \sqrt{113} < 11$ sind $2, 3, 5$ und 7, und keine davon ist Teiler von 113.

Bemerkung. Auch mit der arbeitssparenden Variante des Probedividierens und einem schnellen Computer kann die Untersuchung einer großen Zahl (von einigen hundert Dezimalstellen) etliche Milliarden Jahre in Anspruch nehmen.
Man kennt aber heute Primzahltests, die auch bei solchen Zahlen die Entscheidung, ob sie Primzahl sind oder nicht, innerhalb von Minuten liefern. Diese Tests beruhen auf anderen mathematischen Prinzipien; im Unterschied zum Probedividieren erkennen sie eine Zahl als zusammengesetzt, ohne die geringste Information über ihre Teiler zu geben.
Primzahlen der genannten Größenordnung werden beispielsweise für moderne Verschlüsselungsverfahren benötigt.

3.4 Wie stellt man eine Primzahltabelle her?

Für das Probedividieren ist es nützlich, eine Liste von Primzahlen zu haben. Diese kann allerdings nie vollständig sein, da es unendlich viele Primzahlen gibt.

Um sich eine Liste aller Primzahlen bis zu einer gegebenen Grenze n zu verschaffen, geht man zweckmäßigerweise so vor:

▷ Man schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis n in eine Reihe.

▷ Die 1 kann man gleich streichen, denn sie ist keine Primzahl.

▷ Die erste nicht gestrichene Zahl, 2, ist die erste Primzahl.
Man streicht nun aus der Liste alle Vielfachen von 2, also, bei 2 beginnend, jede zweite Zahl.

▷ Die nächste nicht gestrichene Zahl, 3, ist die nächste Primzahl.
Man streicht nun aus der Liste alle Vielfachen von 3, also, bei 3 beginnend, jede dritte Zahl.

▷ Die nächste nicht gestrichene Zahl, 5, ist die nächste Primzahl.
Nun streicht man aus der Liste alle Vielfachen von 5, also, bei 5 beginnend, jede fünfte Zahl.

▷ Und so weiter.

▷ Sobald man die Vielfachen aller Primzahlen $p \le \sqrt{n}$ gestrichen hat, kann man aufhören.
Alle jetzt noch nicht gestrichenen Zahlen sind (aufgrund der Überlegungen des vorigen Abschnitts) Primzahlen.

Dieses Verfahren heißt „Sieb des Eratosthenes“ (Eratosthenes von Kyrene, 276? – 194? v. Chr.).
Bemerkenswert ist, daß man ohne Divisionen und Multiplikationen auskommt.

Beispiel 14) Wir wollen eine Liste der Primzahlen bis 50 herstellen. Die 1 und die geraden Zahlen schreiben wir gar nicht erst hin, denn sie werden ja ohnehin gleich gestrichen.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 \\ 27 & 29 & 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 & 43 & 45 & 47 & 49 \end{array}$$

Die erste Primzahl (nach 2) ist 3. Streichen der Vielfachen von 3:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underline{3} & 5 & 7 & \cancel{9} & 11 & 13 & \cancel{15} & 17 & 19 & \cancel{21} & 23 & 25 \\ \cancel{27} & 29 & 31 & \cancel{33} & 35 & 37 & \cancel{39} & 41 & 43 & \cancel{45} & 47 & 49 \end{array}$$

Die nächste Primzahl ist 5. Streichen der Vielfachen von 5:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underline{3} & \underline{5} & 7 & \cancel{9} & 11 & 13 & \cancel{15} & 17 & 19 & \cancel{21} & 23 & \cancel{25} \\ \cancel{27} & 29 & 31 & \cancel{33} & \cancel{35} & 37 & \cancel{39} & 41 & 43 & \cancel{45} & 47 & 49 \end{array}$$

Die nächste Primzahl ist 7. Streichen der Vielfachen von 7:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underline{3} & \underline{5} & \underline{7} & \cancel{9} & 11 & 13 & \cancel{15} & 17 & 19 & \cancel{21} & 23 & \cancel{25} \\ \cancel{27} & 29 & 31 & \cancel{33} & \cancel{35} & 37 & \cancel{39} & 41 & 43 & \cancel{45} & 47 & \cancel{49} \end{array}$$

Damit sind wir fertig, denn 11^2 ist schon größer als 50. Die Primzahlen bis 50 sind also

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

4 Aufgaben

1. Wie viele Teiler hat die Zahl 12?
2. Erstellen Sie mit Hilfe des Siebes von Eratosthenes eine Liste der Primzahlen bis 200.
3. Bestimmen Sie die kanonische Zerlegung der Zahlen
   $$6615, \quad 6616, \quad 6617, \quad 6618, \quad 6619, \quad 6620, \quad 6621.$$
4. Ist 39199 eine Primzahl? Und 39203?