Gleichungen

1 Definition und grundlegende Eigenschaften

1.1 Was ist eine Gleichung?

Eine Gleichung sieht grundsätzlich so aus:

$$a = b\,.$$

Dabei sind a (die ***linke Seite***) und b (die ***rechte Seite*** der Gleichung) irgendwelche Objekte (Dinge, mit denen sich die Mathematik beschäftigt, beispielsweise Zahlen), und dazwischen steht das ***Gleichheitszeichen*** „=“. Die Gleichung sagt aus, daß a und b gleich sind.
Das muß aber nicht bedeuten, daß a und b völlig miteinander identisch sind; eine Gleichung wie „$1 = 1$“ ist auch ziemlich uninteressant. Vielmehr sagt eine Gleichung nur aus, daß ihre beiden Seiten in einem gewissen Sinne (der für die betreffende Art von Objekten jeweils genau erklärt werden muß) **gleichwertig** sind.
Beispiele.

1) Auf den beiden Seiten der Gleichung „$5 + 7 = 3 \cdot 4$“ stehen offenbar verschiedene Schriftzeichen, gemeint ist aber, daß nach Ausführen aller Rechenoperationen auf beiden Seiten der Gleichung die selbe Zahl als Ergebnis herauskommt.
2) $\dfrac{6}{34} = \dfrac{15}{85}$
3) $\{2, 3, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

Jedenfalls ist eine Gleichung eine spezielle Form von ***Aussage*** und kann als solche entweder ***wahr*** sein (dann sagt man „Es gilt $a = b$“ oder ähnlich) oder ***falsch***; dann sagt man auch „Es gilt $a \neq b$“ ($\neq$ gesprochen „***ungleich***“).
Viele mathematische Probleme bestehen im Kern darin, herauszufinden, welche dieser beiden Möglichkeiten zutrifft.

1.2 Gesetze

Die grundlegenden Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung sind

- ▷ Es gilt stets $a = a$.
  In Worten: Jedes Objekt ist sich selbst gleich.
- ▷ Wenn $a = b$ ist, dann ist auch $b = a$.
- ▷ Ist $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$.
  In Worten: Sind zwei Objekte jeweils einem gemeinsamen dritten Objekt gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Aufgrund der dritten Gesetzmäßigkeit ist es gerechtfertigt, daß man auch „Gleichungsketten“ wie $a = b = c = \ldots$ schreibt.

2 Rechnen mit Gleichungen

Bei der Untersuchung, ob eine gegebene Gleichung gültig ist, hilft es oft, sie in geeigneter Weise umzuformen. Das grundlegende Prinzip für das Rechnen mit Gleichungen ist

- ▷ Nimmt man in einer gültigen Gleichung auf beiden Seiten die selben Rechenoperationen vor, so erhält man wieder eine gültige Gleichung.
  Z.B. für Zahlen a, b, c: Aus $a = b$ folgt $a + c = b + c$, $a \cdot c = b \cdot c$, $a^2 = b^2$ usw.

Andere Formulierungen dieses Prinzips sind

- ▷ Wendet man auf beide Seiten einer Gleichung die selben Rechenoperationen an und erhält auf diese Weise eine falsche Gleichung, so war auch die ursprüngliche Gleichung falsch. Ist zum Beispiel $a^2 \neq b^2$, so muß auch $a \neq b$ sein.
- ▷ Gilt $a = b$, so kann man in jedem „Ausdruck" (damit ist ein Gebilde aus Objekten und hierfür zulässigen Rechenoperationen gemeint) das Objekt a durch das Objekt b ersetzen, ohne daß sich der Wert des Ausdrucks dabei ändert.
  In Formelzeichen: Ist $A(a)$ ein Ausdruck, in dem (unter anderem) das Objekt a vorkommt, und gilt $a = b$, dann gilt auch $A(a) = A(b)$.

Aber **Vorsicht!** Wenn man am Ende einer Rechnung eine gültige Gleichung erhalten hat, kann man daraus **nicht** ohne weiteres schließen, daß auch die Gleichung, von der man ursprünglich ausgegangen ist, richtig ist. Denn auch aus einer falschen Gleichung kann auf diese Weise eine richtige entstehen, wie folgende Beispiele zeigen:

$$3 \neq 5\,, \quad \text{aber} \quad 3 \cdot 0 = 5 \cdot 0; \qquad -2 \neq 2\,, \quad \text{aber} \quad (-2)^2 = 2^2.$$

Der Umkehrschluß ist nur dann gerechtfertigt, wenn alle vorgenommenen Umformungen auch **umkehrbar** sind, das heißt, wenn es zu jeder verwendeten Rechenoperation eine entgegengesetzte („***inverse***") Rechenoperation mit **eindeutigem** Resultat gibt, die diese wieder rückgängig macht.
Zu den umkehrbaren Rechenoperationen zählen im Bereich der Zahlen beispielsweise die Addition sowie die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl:

- ▷ Von $a + c = b + c$ kommt man wieder zurück zu $a = b$ durch Subtraktion von c.
- ▷ Von $a \cdot c = b \cdot c$ mit $c \neq 0$ kommt man wieder zurück zu $a = b$ mittels Division durch c.

Dagegen ist die Multiplikation mit 0 in keinem Falle umkehrbar und das Quadrieren nur mit Hilfe einer Zusatzinformation: Von $a^2 = b^2$ kann man auf $a = b$ schließen, wenn man weiß, daß a und b beide positiv (oder beide negativ) sind.

Sind alle Schritte einer Umformung umkehrbar, dann folgt in der Tat aus der Gültigkeit der Ausgangsgleichung die Gültigkeit der umgeformten Gleichung **und umgekehrt**, oder, wie man auch sagt, Anfangs- und Endgleichung sind ***äquivalent***.

3 Lösen von Gleichungen

3.1 Gleichungen mit Unbekannten

Oft fragt man sich, ob es in einem Bereich von Objekten eines oder mehrere gibt, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen, und welche Objekte dies gegebenenfalls sind.
Um bei der Untersuchung dieser Frage etwas Konkretes in der Hand zu haben, nimmt man einfach an, es gebe solch ein Objekt, und gibt ihm einen Namen; beliebt ist der Buchstabe x. Man nennt x eine ***Unbekannte*** und rechnet damit wie mit jedem anderen Objekt des betrachteten Bereichs. Die verlangte Eigenschaft läßt sich nun häufig als Gleichung formulieren.

Beispiel 4) Fünf Menschen betreten ein Zimmer. Dadurch verdreifacht sich die Anzahl der darin Anwesenden.
Um herauszufinden, von wie vielen Menschen die Rede ist, machen wir folgenden ***Ansatz***: Es sei x die Anzahl der ursprünglich im Zimmer befindlichen Menschen; dann besagen die obigen Angaben, daß $x + 5 = 3x$ ist.

Allgemein hat eine Gleichung in der Unbekannten x die Gestalt

$$A(x) = B(x),$$

wobei $A(x)$ und $B(x)$ zwei Ausdrücke sind, in denen x vorkommen darf (aber nicht unbedingt muß; siehe unten). Diese Gleichung ist „an sich“ weder wahr noch falsch; sie wird erst dann entweder wahr oder falsch, wenn man anstelle von x ein Objekt des betrachteten Bereichs einsetzt. Weil sie auf diese Weise gewisse Objekte auszeichnet oder ***bestimmt***, nennt man sie auch eine ***Bestimmungsgleichung*** für x.

3.2 Lösungen

Ein Objekt a aus dem betrachteten Bereich heißt eine ***Lösung*** der Gleichung $A(x) = B(x)$, wenn diese bei Ersetzung von x durch a wahr wird, kurz: wenn $A(a) = B(a)$ gilt. Man sagt dann auch, a ***erfülle*** oder ***befriedige*** die Gleichung.
Besitzt die Gleichung mindestens eine Lösung, so heißt sie ***lösbar***, anderenfalls ***unlösbar***. Besitzt die Gleichung **genau eine** Lösung, nennt man sie auch ***eindeutig lösbar***.
Eine Gleichung ***lösen*** bedeutet, ihre sämtlichen Lösungen zu ermitteln.

Beispiel 5) Die Lösungen X der Mengengleichung $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$ sind die Mengen $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Ein naheliegender Versuch, eine Gleichung zu lösen, besteht im **Probieren**: Man nimmt ein Objekt nach dem anderen und prüft, ob es die Gleichung erfüllt. Mit etwas Glück mag man dabei auf Lösungen stoßen, aber abgesehen davon, daß dieses Vorgehen ziemlich mühsam werden kann, gibt es noch ein grundsätzliches Problem: Sobald unendlich viele Objekte in Frage kommen, kann man niemals sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben, und auch die Unlösbarkeit einer Gleichung kann man auf diese Weise niemals nachweisen.

Glücklicherweise gibt es – abhängig von der Bauart der Gleichung – oftmals bessere Lösungswege.

3.3 Vereinfachen

Angenommen, die Gleichung

$$G:\ A(x) = B(x)$$

wird wie in Abschnitt 2 beschrieben umgeformt, sagen wir in die Gleichung

$$\widetilde{G}:\ \widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x).$$

Diese sei so „einfach“, daß man sie lösen kann.
Was haben dann die Lösungen von $\widetilde{G}$ mit denen von G zu tun?

Nach den Überlegungen von Abschnitt 2 ist jede Lösung von G auch Lösung von $\widetilde{G}$, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Anders ausgedrückt: Unter den Lösungen von $\widetilde{G}$ findet man mit Sicherheit sämtliche Lösungen von G, aber darüber hinaus eventuell noch sogenannte „***Scheinlösungen***“.
Man kann sich das so vorstellen: Bei der Umformung geht unter Umständen Information verloren (beim Quadrieren beispielsweise eine Vorzeicheninformation). Dann stellt $\widetilde{G}$ eine weniger einschränkende Bedingung für x dar als G und kann demzufolge mehr Lösungen besitzen.

Die Entscheidung bringt hier eine ***Probe***: Man prüft durch Einsetzen, welche der Lösungen von $\widetilde{G}$ auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung G sind.

Nur wenn alle Schritte der Umformung umkehrbar, G und $\widetilde{G}$ also im Sinne von Abschnitt 2 **äquivalent** sind, kann man davon ausgehen, daß G und $\widetilde{G}$ die selben Lösungen haben. Dann kommt man – wenn man sich seiner Rechnung sicher ist – ohne Probe aus.

Bleibt noch die Frage, was „einfach“ ist, und ob es eine Strategie gibt, die man beim Umformen einer Gleichung verfolgen sollte. Es ist schwer, hierüber etwas Allgemeingültiges zu sagen. Deshalb nur zwei Bemerkungen:

- ▷ Es gibt in der Regel viele Möglichkeiten für korrekte Umformungen; die Kunst besteht darin, darunter diejenigen auszuwählen, die einen dem Ziel näher bringen. Diese Kunst erlernt man durch **Übung**.
- ▷ Man darf es mit dem Vereinfachen nicht übertreiben, sonst verliert man zuviel Information. Multiplikation mit Null beispielsweise vereinfacht eine Gleichung enorm, ist aber völlig nutzlos.

3.4 Auflösen einer Gleichung nach einer Unbekannten

Im Idealfall läßt sich eine Gleichung $A(x) = B(x)$ ***nach*** x ***auflösen***, d.h. umformen in eine Gleichung der Gestalt

$$x = C,$$

bei der x allein auf einer Seite steht, während die andere Seite ein Ausdruck ist, in dem x nicht vorkommt, der sich also ausrechnen läßt mit einem ganz bestimmten Objekt als Ergebnis.
Man nennt eine nach x aufgelöste Darstellung auch ***explizit*** im Unterschied zu einer Gleichung $A(x) = B(x)$, durch die x ***implizit*** bestimmt ist.

Hat man bei der Umformung nur umkehrbare Rechenoperationen verwendet, dann hat man so die einzige Lösung der Gleichung $A(x) = B(x)$ gefunden; sonst muß man noch eine Probe machen, um sicherzustellen, daß der gefundene Wert die Gleichung auch wirklich löst.

Beispiel 6) Wir lösen die Gleichung $x + 5 = 3x$ aus Beispiel 4 nach x auf.

$$\begin{aligned} x + 5 &= 3x && : \quad \text{Subtraktion von } x \\ 5 &= 2x && : \quad \text{Division durch 2} \\ \tfrac{5}{2} &= x && \text{bzw.} \quad x = \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Da die verwendeten Rechenoperationen alle umkehrbar sind, ergibt sich $x = \frac{5}{2}$ als einzige Lösung der Gleichung. Es folgt allerdings auch, daß das ursprüngliche Problem unlösbar ist, da dort für x offenkundig nur ganzzahlige Werte in Frage kommen. Die in Beispiel 4 gemachten Angaben können also nicht stimmen.

3.5 Wenn sich die Gleichung nicht auflösen läßt

Wenn es einem nicht gelingt, eine Gleichung aufzulösen, dann kann dies – abgesehen davon, daß man sich ungeschickt anstellt – verschiedene Gründe haben. Die Gleichung kann beispielsweise unlösbar sein. Oder sie hat mehrere Lösungen; dann läßt sie sich sicherlich nicht eindeutig nach der Unbekannten auflösen.
Manchmal äußert sich dies dadurch, daß die Unbekannte „***herausfällt***“, d.h., nach einer Umformung völlig aus der Gleichung verschwunden ist.
Beispiele.

7) Wenn man in der Gleichung

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

das Quadrat auf der linken Seite ausrechnet und anschließend auf beiden Seiten subtrahiert, gelangt man zu der Gleichung $0 = 0$, und die ist wahr – gleichgültig, welchen Wert

x hat. Da nur umkehrbare Rechenoperationen verwendet wurden, folgt, daß auch die ursprüngliche Gleichung immer – für jeden Zahlenwert von x – wahr ist.
In solch einem Fall spricht man nicht von einer Bestimmungsgleichung, sondern von einer ***Identität***.

8) Auf die gleiche Weise sieht man, daß die Gleichung $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 3$ unlösbar ist, denn sie führt auf die (für jeden Wert von x) falsche Gleichung $0 = 2$.

Manchmal scheitert das Auflösen auch daran, daß keine passende Rechenoperation zur Verfügung steht.
Beispiele.

9) Die Aufgabe, Gleichungen wie $x^2 - x = 4x - 6$ nach x aufzulösen, erfordert das Ziehen von Quadratwurzeln (dabei handelt es sich, streng genommen, nicht einmal um eine Rechenoperation im bisherigen Sinne, da das Ergebnis in der Regel nicht eindeutig ist).
Im vorliegenden Fall läßt sich die Gleichung aber auch anders lösen. Sie ist äquivalent zu

$$0 \;=\; x^2 - 5x + 6 \;=\; (x-2)\cdot(x-3)\,,$$

und da ein Produkt dann und nur dann Null wird, wenn mindestens ein Faktor Null ist, ergeben sich als Lösungen $x = 2$ und $x = 3$.

10) Die Gleichung $x \cdot 3^x = 18$ läßt sich mit den üblichen Rechenoperationen nicht nach x auflösen. Durch Probieren findet man die Lösung $x = 2$, und man kann auch zeigen, daß es keine weiteren Lösungen gibt.

Manchmal kann man sich eine für die aktuelle Anwendung maßgeschneiderte Rechenoperation **definieren**. Dabei verhält es sich mit einer solchen Definition ähnlich wie mit einer technischen Erfindung: Sie muß nachweislich funktionieren und das Verlangte leisten. Der bloße Wunsch genügt jedenfalls nicht.
Zu den Rechenoperationen, die eigens zu dem Zweck erfunden wurden, gewisse Typen von Gleichungen aufzulösen, gehören das Wurzelziehen und das Logarithmieren. Damit sie funktionieren, müssen allerdings gewisse Bedingungen beachtet werden.

4 Zuweisung

Das Gleichheitszeichen wird auch noch in einer anderen Bedeutung verwendet, nicht als Feststellung, daß zwei Objekte gleich **sind**, sondern als Festsetzung, daß zwei Objekte gleich sein **sollen**. Dabei ist eines der Objekte, etwa a, bereits bekannt, und das andere ist ein Symbol, sagen wir y, das noch „frei“ ist, also bisher noch keine Bedeutung hat.
Man weist dem Symbol y den Wert a zu (oder kurz: man ***definiert*** y als a), indem man sagt

„Es sei $y = a$“ oder auch schreibt „$y := a$“ bzw. „$a =: y$“,

wobei der Doppelpunkt immer auf der Seite des zu definierenden Symbols steht.
Der Effekt ist, daß von nun an „$y = a$“ eine wahre Gleichung ist, man also in seiner Rechnung immer a durch y ersetzen („***substituieren***“) darf. Dies ist insbesondere von Nutzen, wenn a durch einen komplizierten Ausdruck gegeben ist; dann dient y einfach als Abkürzung. Man kann so eine Rechnung oft bedeutend übersichtlicher gestalten.

Beispiel 11) Wir wollen versuchen, den Ausdruck

$$x^6 \cdot 8^x + x^4 \cdot 4^{x+1} + x^2 \cdot 2^{x+2}$$

zu vereinfachen. Mit Hilfe der Potenzrechenregeln läßt er sich zunächst umformen in

$$(x^2 \cdot 2^x)^3 + 4 \cdot (x^2 \cdot 2^x)^2 + 4 \cdot (x^2 \cdot 2^x)\,.$$

Da x hier nur innerhalb des Teilausdrucks $x^2 \cdot 2^x$ auftritt, liegt es nahe, für diesen eine Abkürzung einzuführen. Durch die ***Substitution*** $u := x^2 \cdot 2^x$ geht unser Ausdruck über in

$$u^3 + 4u^2 + 4u\,,$$

und dies läßt sich leicht umformen in

$$u \cdot (u^2 + 4u + 4) \;=\; u \cdot (u+2)^2.$$

Wenn wir hier wieder u durch x ausdrücken („***zurücksubstituieren***"), erhalten wir die **Identität** (vgl. Beispiel 7)

$$x^6 \cdot 8^x + x^4 \cdot 4^{x+1} + x^2 \cdot 2^{x+2} \;=\; x^2 \cdot 2^x \cdot (x^2 \cdot 2^x + 2)^2.$$

5 Einige spezielle Typen von Gleichungen

In diesem Abschnitt und den zugehörigen Aufgaben werden zum Zweck der kürzeren und übersichtlicheren Darstellung die logischen Symbole „$\Rightarrow$" und „$\Leftrightarrow$" sowie gelegentlich die Mengenschreibweise verwendet. Über ihre Bedeutung kann man sich in der Lektion „Grundbegriffe" orientieren.

5.1 Lineare Gleichungen

Als ***lineare*** Gleichung (oder Gleichung ***ersten Grades***) bezeichnet man eine Gleichung der Form

$$ax + b \;=\; 0\,,$$

wobei a und b gegebene Zahlen sind und x die Unbekannte ist.
Ist $a \neq 0$, so läßt sich die Gleichung eindeutig nach x auflösen:

$$x \;=\; -\frac{b}{a}\,.$$

Ist dagegen $a = 0$, so wird die Gleichung zu „$b = 0$", in ihr kommt die Unbekannte x also gar nicht wirklich vor. Das heißt: Ist $b = 0$, dann ist jede Zahl x Lösung der Gleichung; ist $b \neq 0$, dann ist die Gleichung unlösbar.

Beispiel 12) Die Gleichung

$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+3} \;=\; \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+9}$$

ist natürlich nicht linear, aber sie läßt sich auf eine lineare Gleichung zurückführen.

Damit überhaupt alle Brüche definiert sind, muß $x \notin \{-1\,,\,-3\,,\,-7\,,\,-9\}$ sein.
Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+7)(x+3)(x+1)(x+9)$ – der dann ja ungleich Null ist – führt auf die äquivalente Gleichung

$$(x+3)(x+1)(x+9) + (x+7)(x+1)(x+9) \;=\; (x+7)(x+3)(x+9) + (x+7)(x+3)(x+1)\,.$$

Jetzt rechnen wir die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung aus und hoffen, daß dabei einiges „herausfällt". Um Arbeit zu sparen und die Übersicht zu behalten, klammern wir zunächst gleiche Faktoren aus:

$$\begin{aligned} [(x+3)+(x+7)] \cdot (x+1)(x+9) &= (x+7)(x+3) \cdot [(x+9)+(x+1)]\,, \\ \Leftrightarrow \qquad (2x+10)(x+1)(x+9) &= (x+7)(x+3)(2x+10). \end{aligned}$$

Hier einfach durch $2x+10$ zu dividieren, wäre ein fataler Fehler, denn dieser Faktor könnte ja Null sein! (In der Tat würde man so die einzige Lösung verschenken und eine unlösbare Gleichung produzieren.) Wir multiplizieren lieber weiter aus:

$$(2x+10)(x^2+10x+9) \;=\; (x^2+10x+21)(2x+10)\,.$$

Ohne noch weiter zu rechnen, sieht man jetzt, daß auf beiden Seiten der Gleichung das Produkt $(2x+10)(x^2+10x)$ auftritt und also herausfällt. Übrig bleibt

$$(2x+10)\cdot 9 \;=\; 21\cdot(2x+10)\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \;=\; 12\cdot(2x+10)\,,$$

also nach Division durch 12 die lineare Gleichung $2x+10=0$ mit der Lösung $x=-5$. Da -5 nicht zu den oben ausgeschlossenen x-Werten gehört, handelt es sich dabei tatsächlich um eine – und zwar die einzige – Lösung der ursprünglichen Gleichung.

5.2 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Gestalt

$$ax^2+bx+c \;=\; 0$$

mit gegebenen Zahlen a,b,c heißt ***quadratische*** Gleichung oder auch Gleichung ***zweiten Grades***. Im Falle $a=0$ ist dies in Wahrheit nur eine lineare Gleichung; also nehmen wir jetzt an, daß $a\neq 0$ ist. Dann können wir, indem wir die ganze Gleichung durch a dividieren, den ***Koeffizienten*** (Zahlenfaktor) von x^2 zu 1 ***normieren***:

$$x^2+px+q \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad p:=\frac{b}{a}\,,\;\; q:=\frac{c}{a}\,.$$

Im nächsten Schritt formen wir den Ausdruck x^2+px mittels ***quadratischer Ergänzung*** (siehe Lektion „Rechentechnik“) um:

$$x^2+px \;=\; x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$$

Die *gemischt quadratische* Gleichung $x^2+px+q=0$ (in der die Unbekannte außer in der zweiten auch in der ersten Potenz vorkommt) erweist sich damit als äquivalent zu der *rein quadratischen* Gleichung

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \frac{p^2}{4}-q\,.$$

Nun läßt sich leicht ablesen:

- ▷ Ist $\frac{p^2}{4}-q<0$, so ist die Gleichung (jedenfalls innerhalb der reellen Zahlen) unlösbar, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ.
- ▷ Ist $\frac{p^2}{4}-q=0$, so folgt $x+\frac{p}{2}=0$; die einzige Lösung der Gleichung ist dann also $x=-\frac{p}{2}$.
- ▷ Ist schließlich $\frac{p^2}{4}-q>0$, dann muß $x+\frac{p}{2}$ einen der beiden Werte $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ und $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ haben; damit ergeben sich die beiden Lösungen

$$x_{1/2} \;=\; -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Dies ist die häufig so genannte „p-q-Formel“ für die Lösungen einer quadratischen Gleichung. Man kann sie auswendig lernen, aber wichtiger ist es, die Technik der quadratischen Ergänzung zu beherrschen.

Beispiele.

13) Die Gleichung $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ist zu lösen. Normierung und quadratische Ergänzung:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \;=\; \Big(x - \frac{5}{4}\Big)^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} \;=\; \Big(x - \frac{5}{4}\Big)^2 - \frac{1}{16}\,.$$

Also ist

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Big(x - \frac{5}{4}\Big)^2 = \frac{1}{16}\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}\,,$$

und man erhält die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\,, \qquad x_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1\,.$$

14) Die Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat keine reelle Lösung, denn es ist stets

$$x^2 - 4x + 5 \;=\; (x-2)^2 - 4 + 5 \;=\; (x-2)^2 + 1 \;\geq\; 1 \;>\; 0\,.$$

15) In der Gleichung vierten Grades $x^4 + 6x^2 - 2 = 0$ kommen nur *gerade* Potenzen von x vor; also kann man sie mit Hilfe der Substitution $u := x^2$ zurückführen auf die quadratische Gleichung $u^2 + 6u - 2 = 0$. Wegen

$$u^2 + 6u - 2 \;=\; (u+3)^2 - 9 - 2 \;=\; (u+3)^2 - 11$$

hat diese die Lösungen $u_1 = -3 - \sqrt{11}$ und $u_2 = -3 + \sqrt{11}$.
Die Lösungen x der ursprünglichen Gleichung erhält man hieraus, indem man die Gleichungen $x^2 = u_1$ und $x^2 = u_2$ löst.
Da u_1 negativ ist, hat die Gleichung $x^2 = u_1$ keine reellen Lösungen. u_2 dagegen ist positiv (denn $\sqrt{11} > \sqrt{9} = 3$); damit ergeben sich die reellen Lösungen der Gleichung $x^4 + 6x^2 - 2 = 0$ zu

$$x_1 = \sqrt{-3 + \sqrt{11}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\sqrt{-3 + \sqrt{11}}\,.$$

5.3 Wurzelgleichungen

nennt man Gleichungen, bei denen die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel auftritt. Man kann eine solche Gleichung unter Umständen auf einen mit bekannten Methoden lösbaren Typ zurückführen, indem man eine der Wurzeln isoliert (d.h., allein auf eine Seite der Gleichung bringt) und dann die Gleichung potenziert. Gegebenenfalls muß man diesen Prozeß mehrmals wiederholen. Dabei ist zu beachten, daß beim Potenzieren in der Regel (Vorzeichen-)Information verlorengeht, man am Schluß also eventuell auch Lösungen erhält, die die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. Um diese auszuschließen, muß man auf jeden Fall eine Probe machen, wenn man nicht durchgehend in Äquivalenzen geschlossen hat.

Beispiel 16) Gesucht sind alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\sqrt{23x - 11} - \sqrt{7x - 3} = \sqrt{3x + 4}\,.$$

Damit alle Wurzeln definiert sind, muß $23x - 11 \geq 0$, $7x - 3 \geq 0$ und $3x + 4 \geq 0$, insgesamt also $x \geq \frac{11}{23}$ sein. Dann gilt

$$\sqrt{23x - 11} - \sqrt{7x - 3} \;=\; \sqrt{3x + 4}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 23x-11-2\sqrt{23x-11}\sqrt{7x-3}+7x-3 \;=\; 3x+4\,,\\
&\Leftrightarrow\ 27x-18 \;=\; 2\sqrt{(23x-11)(7x-3)}\,,\\
&\Rightarrow\ 81(3x-2)^2 \;=\; 4(23x-11)(7x-3),\\
&\Leftrightarrow\ 85x^2-388x+192 \;=\; 0,\\
&\Leftrightarrow\ (x-\tfrac{194}{85})^2 \;=\; \tfrac{194^2}{85^2}-\tfrac{192}{85} \;=\; \tfrac{21316}{85^2} \;=\; \tfrac{146^2}{85^2}\,,\\
&\Leftrightarrow\ x-\tfrac{194}{85} \;=\; \pm\tfrac{146}{85}\,,\\
&\Leftrightarrow\ x\in\{4,\ \tfrac{48}{85}\}\,.
\end{aligned}$$

Probe:

Der Wert $x=4$ ist Lösung der Gleichung:

$$\sqrt{23\cdot 4-11}-\sqrt{7\cdot 4-3} \;=\; 9-5 \;=\; 4 \;=\; \sqrt{3\cdot 4+4}\,.$$

Der Wert $x=\frac{48}{85}$ liegt zwar auch im Definitionsbereich der Wurzeln, ist aber keine Lösung:

$$\sqrt{23\cdot\tfrac{48}{85}-11}-\sqrt{7\cdot\tfrac{48}{85}-3} \;=\; \sqrt{\tfrac{169}{85}}-\sqrt{\tfrac{81}{85}} \;=\; \tfrac{13-9}{\sqrt{85}} \;=\; \tfrac{4}{\sqrt{85}}\,,$$

$$\text{aber}\qquad \sqrt{3\cdot\tfrac{48}{85}+4} \;=\; \sqrt{\tfrac{484}{85}} \;=\; \tfrac{22}{\sqrt{85}}\,.$$

($x=\frac{48}{85}$ ist Lösung der Gleichung $\sqrt{23x-11}+\sqrt{7x-3}=\sqrt{3x+4}$.)

5.4 Gleichungen mit Parametern

Als ***Parameter*** bezeichnet man variable Größen, von denen die Gleichung als Ganzes abhängt. Beispiele hierfür sind a, b, c, p, q in den obigen Abschnitten 5.1 und 5.2. Wie man dort schon sehen kann, wird von den Parameterwerten im allgemeinen nicht nur die Lösung selbst abhängen, sondern vor allem auch die Antwort auf die Frage, ob es überhaupt Lösungen gibt und wie viele es sind.

Bei der Umformung einer solchen Gleichung muß man immer die Parameter im Auge behalten und sich bei jedem Schritt vergewissern, ob die vorgenommenen Operationen auch für alle möglichen Parameterwerte zulässig sind; sonst kann es einem passieren, daß man beispielsweise, ohne es zu merken, durch Null dividiert. Notfalls muß man verschiedene Fälle unterscheiden.

Eine vernünftige Strategie ist, die Gleichung zunächst mittels „unkritischer“ Operationen (z.B. Additionen) so weit wie möglich zu vereinfachen und eine Fallunterscheidung möglichst hinauszuzögern.

Beispiel 17) Es seien $a, b\in\mathbb{R}$. Gesucht sind alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{2ab}{x^2-a^2}\,.$$

Es muß jedenfalls $x\neq\pm a$ sein.

Durch Multiplikation mit $(x-a)(x+a)$ erhält man dann die äquivalente Gleichung

$$0 \;=\; (x+a)^2-(x-a)^2-2ab \;=\; 4ax-2ab \;=\; 2a\cdot(2x-b)\,.$$

Im Fall $a\neq 0$ ist die einzige Lösung also $x=b/2$, vorausgesetzt, die Bedingung $x\neq\pm a$, d.h. $b\neq\pm 2a$, ist erfüllt; sonst besitzt die Gleichung keine Lösung.

Im Fall $a=0$ ist jedes $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ eine Lösung.

Zusammengefaßt: Die Gleichung ist

- ▷ eindeutig lösbar durch $x = b/2$, wenn $a \neq 0$ und $b \neq \pm 2a$ ist;
- ▷ lösbar durch jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn $a = 0$ ist;
- ▷ unlösbar in jedem anderen Fall.

6 Aufgaben

1. Lösen Sie die Gleichung $U = R \cdot I$ nach I bzw. R auf.

2. (a) Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{x-1}{3x-2}$ nach x auf. Was ist dabei zu beachten?

   (b) Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{x-1}{3x-2} = 5$.

3. Jetzt hat man folgende Aufgabe: Einer, der gut zu Fuß ist, geht 100 Schritt und einer, der nicht gut zu Fuß ist, geht in derselben Zeit 60 Schritt. Jetzt ist der Langsame 100 Schritt zuerst gegangen und der Schnelle verfolgt ihn. Frage: Nach wieviel Schritt holt er ihn ein? (Anmerkung: „Schritt" ist ein Längenmaß.)

   [Aus: *Chiu Chang Suan Shu, Neun Bücher arithmetischer Technik*, Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v.Chr. bis 9 n.Chr.)]

4. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{16^x - 1}{(4^x + 1)(2^x + 1)}$ mit Hilfe der Substitution $u := 2^x$.

5. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

   (a) $x(x+7) - (x+1)^2 = 24$; (b) $6(x^2 - 3x - 1) - (2x-1)(3x-5) = 0$;

   (c) $\dfrac{x-2}{3x-4} = \dfrac{5x-6}{15x+8}$; (d) $\dfrac{2x+1}{4x^2+6x+1} = \dfrac{3x-2}{6x^2+2x-5}$.

6. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

   (a) $x^2 - 2x - 63 = 0$; (b) $\dfrac{2}{x} + 1 = \dfrac{6}{x+1}$;

   (c) $13x^2 - 9x^4 = 4$; (d) $\dfrac{2x+8}{x+3} - \dfrac{x-5}{x-4} = \dfrac{3x-5}{x^2-x-12}$.

7. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

   (a) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = 7$; (b) $\sqrt{5-3x} + \sqrt{3x-5} = 4$.

8. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

   (a) $(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b) = (a-b)^2$;

   (b) $\dfrac{x-b}{a} - \dfrac{x-a}{b} = 0$.

   Untersuchen Sie bezüglich der Abhängigkeit von a und b alle möglichen Fälle.