Modellbildung: Grafisches Lösen von Gleichungen

Timm Grams, Fulda, http://www.fh-fulda.de/~grams

7. April 2004 (ergänzt: 28.10. 05)

Zweck der Lektion

Erlernt und eingeübt werden sollen die mathematische Modellierung und die angemessene Verwendung grafischer Darstellungen zur Lösung einer Aufgabe aus dem Alltag.

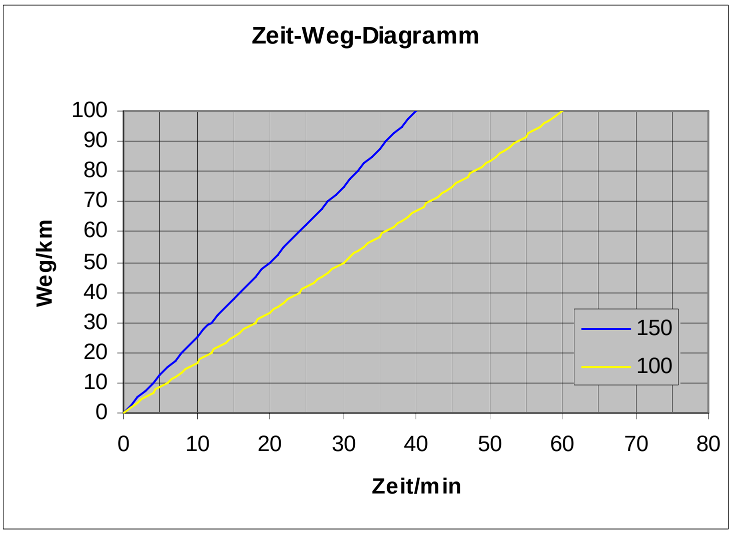
Aufgabe

Herr Müller und Herr Schmitt wollen von Fulda aus zu einer Besprechung nach Kassel. Die Besprechung ist für 10 Uhr angesetzt. Beide fahren mit ihrem eigenen Auto. Die Autobahnstrecke ist 100 km lang und um diese Zeit wenig befahren. Müller ist ein eher ruhiger Zeitgenosse und fährt auf der Autobahn vorzugsweise 100 km/h. Er fährt in Fulda um 8.30 Uhr los. Nach 30 km kommt eine Raststätte. Dort trinkt er einen Kaffee und setzt nach einer Viertelstunde seine Fahrt fort. Schmitt fährt auf Autobahnen wenn es geht 150 km/h. Er fährt erst um 9.00 Uhr los. Er macht keine Pause. Kommen beide rechtzeitig in Kassel an? Wird Schmitt Müller überholen? Wo? Wann?

Modellierung

Die Bewegung der Fahrzeuge in Abhängigkeit von „Zeit und Raum“, lässt sich in einem kartesischen *Koordinatensystem der Ebene* darstellen. Für die Modellierung der Abläufe nehmen wir ein Blatt Karopapier oder - wenn es besonders genau werden soll - Millimeterpapier.

Wir zeichnen zwei Achsen: eine 1. Achse parallel zur Grundlinie des Papiers und eine dazu senkrechte 2. Achse. Die 1. Achse erhält eine Skala für die verstrichene Zeit die zweite Achse eine Skala für den zurückgelegten Weg. Ein Achsenabschnitt der 1. Achse heißt *Abszisse*[1] und ein Abschnitt der 2. Achse *Ordinate*. Abszissen und Ordinaten repräsentieren hier also Zeiten und Wege (Zeit-Weg-Diagramm[2]).



Die Zeitachse versehen wir mit einer Skalierung von 0 bis 80 min und die Wegachse mit einer Skalierung von 0 bis 100 km.

In dieses Koordinatensystem wollen wir die Bewegungen der beiden Fahrzeuge eintragen.

Ermittlung des Ergebnisses

Wir beginnen damit, dass wir die Bewegungen der Fahrzeuge eintragen unter der Annahme, dass beide zum Zeitpunkt null starten und keine Pause machen. Diese Kurven sind Geraden mit den Steigungen 100 km/60 min, das ist die Geschwindigkeit von Herrn Müller, und

---

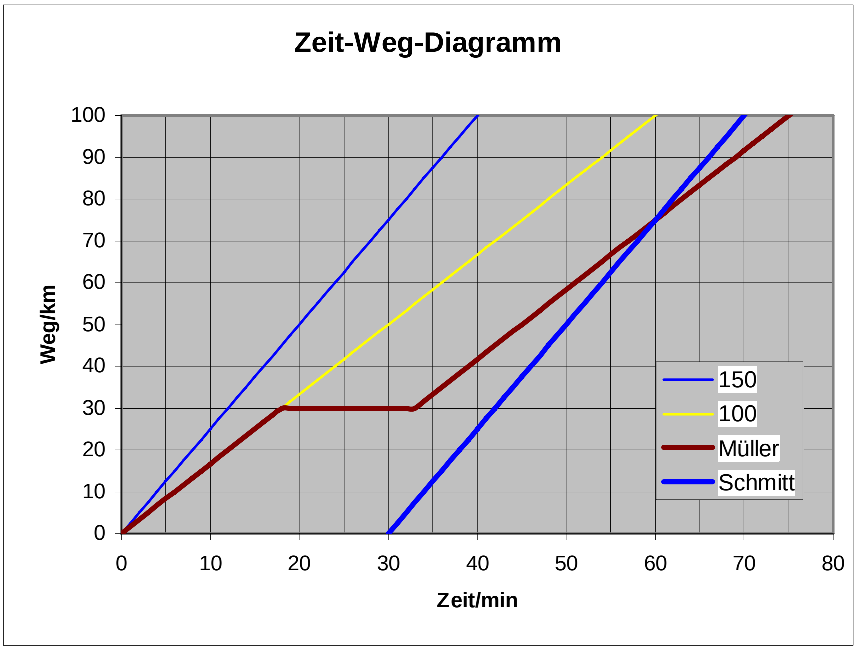
[1] Abszisse steht für „abgeschnittene Linie“ (lateinisch: linea abszissa) oder Achsenabschnitt.

[2] Bei Funktionsdarstellungen $y = f(x)$ trägt man üblicherweise auf der 1. Achse die x-Werte und auf der 2. Achse die y-Werte an. Deshalb wird diese Art der grafischen Darstellung zuweilen auch x-y-Diagramm genannt.

150 km/60 min, so schnell fährt Herr Schmitt. Die Geraden erhalten die Bezeichnungen „100“ und „150“, siehe Grafik.

Herr Müller fährt sofort los bis zur Raststätte. Der Grafik entnehmen wir, dass er nach 18 min die Raststätte erreicht. Dort verweilt er für 15 min. Anschließend setzt der seine Fahrt mit der ursprünglichen Geschwindigkeit fort. Für den letzten Teil müssen wir die ursprüngliche Bewegungskurve parallel nach rechts in der neuen Startpunkt verschieben. Wir sehen: Müller kommt nach 75 min in Kassel an.

Schmitt startet 30 min später. Seine Bewegungskurve müssen wir dementsprechend parallel verschieben. Dem unten stehenden Diagramm entnehmen wir, dass Herr Schmitt Herrn Müller nach 60 min bei Kilometer 75 überholt. Er kommt 5 Minuten vor Müller in Kassel an.



Kontrolle

Validierung[3]: Zur Kontrolle bilden wir ein zweites Modell, diesmal durch Einführung von Variablen und mathematischen Gleichungen. Dann vergleichen wir die Ergebnisse.

Alternatives Modell: Für die gesuchten und zunächst unbekannten Größen werden Symbole eingeführt: Zum Zeitpunkt t_1 kommt Müller in der Raststätte an, und zum Zeitpunkt t_2 fährt er weiter. Zeitpunkt und Ort des Überholens sind t und x. Der Aufgabenstellung übersetzen wir in Gleichungen:

$$100\text{ km/h} \cdot t_1 = 30\text{ km} \qquad \text{(Müller 1)}$$

$$t_2 = t_1 + 15\text{ min} \qquad \text{(Müller 2)}$$

$$30\text{ km} + 100\text{ km/h} \cdot (t - t_2) = x \qquad \text{(Müller 3)}$$

$$150\text{ km/h} \cdot (t - 30\text{ min}) = x \qquad \text{(Schmitt)}$$

[3] Die *Validierung* ist der Nachweis, dass ein Modell gültig ist und den Wirklichkeitsausschnitt einer Aufgabe oder eines Problems angemessen beschreibt. Das kann man tun, indem man das Ergebnis noch einmal auf eine andere Weise herleitet. Hier wird zusätzlich zur grafischen Modellierung eine Modellierung mit algebraischen Gleichungen gewählt. Diese Anwendung verschiedenartiger Methoden ist ein bewährtes Vorgehen in der Sicherheitstechnik und wird *Diversität* genannt. Prüfen Sie stets auch nach, ob die Ergebnisse plausibel sind. Schalten Sie nach allen Modellierungen und Formalisierungen den „gesunden Menschenverstand“ wieder ein.

Lösung der Gleichungen: Die Gleichung (Müller 1) ergibt t_1 = 30 km/(100 km/h) = 0,3 h = 0,3 · 60 min = 18 min.

Aus der Gleichung (Müller 2) folgt: t_2 = 18 min + 15 min = 33 min. Dieser Wert wird in die Gleichung (Müller 3) eingesetzt. Aus den Gleichungen (Müller 3) und (Schmitt) eliminieren wir x:

$$30 \text{ km} + 100 \text{ km/h} \cdot (t - 33 \text{ min}) = 150 \text{ km/h} \cdot (t - 30 \text{ min})$$

Diese Gleichung lösen wir nach t auf und erhalten

$$\begin{aligned} t &= (30 \text{ km} - 100 \text{ km/h} \cdot 33 \text{ min} + 150 \text{ km/h} \cdot 30 \text{ min})/(50 \text{ km/h}) \\ &= (30 \text{ km} - 100 \text{ km} \cdot 33 \text{ min}/60 \text{ min} + 150 \text{ km} \cdot 30 \text{ min}/60 \text{ min})/(50 \text{ km}/60 \text{ min}) \\ &= (30 \text{ km} - 55 \text{ km} + 75 \text{ km}) \cdot 60 \text{ min}/50 \text{ km} = 60 \text{ min} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (Schmitt) erhalten wir schließlich noch den Wert

$$x = 150 \text{ km/h} \cdot (60 \text{ min} - 30 \text{ min}) = 75 \text{ km}.$$

Ergebnisvergleich und Schlussfolgerung: Mit Mitteln der Algebra haben wir so dasselbe Ergebnis erhalten wie vorher auf grafischem Weg. Das ist beruhigend.

Interpretation des Ergebnisses

Da der Zeitnullpunkt der Zeitskala mit der Uhrzeit 8.30 zusammenfällt, erreicht Müller Kassel um 9.45 Uhr. Schmitt kommt um 9.40 Uhr in Kassel an. Der Überholvorgang hat um 9.30 Uhr bei Kilometer 75 stattgefunden. Wenn die innerörtliche Parkplatzsuche nicht zu viel Zeit in Anspruch nimmt, sollte es beiden gelingen, rechtzeitig zur Besprechung zu kommen.

Kritische Betrachtung von Methode und Ergebnis

Die betrachteten Modelle enthalten einige Idealisierungen und Vernachlässigungen: Konstante Geschwindigkeiten sind auf Autobahnen kaum möglich. Unberücksichtigt geblieben sind Geschwindigkeitsbegrenzungen, Baustellen, Lastwagen, die einander überholen („Elefantenrennen"). Auch Beschleunigungs- und Bremsvorgänge wurden vernachlässigt, ebenso die Anfahrt zur Autobahn und die Parkplatzsuche in der Stadt. Gegenüber diesen Vernachlässigungen und Störeinflüssen sind die Ungenauigkeiten der grafischen Methode kaum der Rede wert.

Aufgaben

1 Auf der 30 km langen Bahnstrecke zwischen Apfelhofen und Birntal begegnen sich zwei Züge. Der erste Zug ist in Apfelhofen um 8.15 Uhr Richtung Birntal abgefahren. Der Zug von Birntal ist in Gegenrichtung um 8.20 Uhr gestartet. Beide können die vorgeschriebenen Geschwindigkeiten einhalten: Auf den ersten 10 km von Apfelhofen aus dürfen die Züge nur 60 km/h fahren, danach sind 90 km/h vorgeschrieben. Das gilt bis 5 km vor Birntal. Von dort bis Birntal sind wieder nur 60 km/h möglich. Die Geschwindigkeitsvorgaben gelten an jeder Stelle für beide Richtungen. Wo und wann findet die Begegnung statt?

2 Lösen Sie die Gleichung $x^2 - 0{,}75\,x - 3 = 0$ auf grafischem Weg, indem Sie die Schnittpunkte der Parabel $y = x^2$ mit der durch $y = 0{,}75\,x + 3$ definierten Geraden bestimmen. Lösen Sie zur Kontrolle die ursprüngliche Gleichung nach x auf.

3 Zwei Radfahrer befinden sich auf dem Weg von Adorf nach Bdorf. Sechzig Kilometer vor Bedorf hat eines der beiden Räder einen Platten. Die beiden beschließen, das fahrbereite Rad auf der verbleibenden Strecke zu teilen. Während der eine fährt, geht der andere zu Fuß. Sie starten gemeinsam. Nach einer beliebigen Distanz lässt der Fahrende das Rad am Straßenrand stehen und geht weiter. Der andere geht bis zum Fahrrad, nimmt es und fährt bis zu dem Punkt an dem er den Vorausgehenden einholt. Dort beginnt das Spiel erneut. Beide gehen mit einer Geschwindigkeit von fünf Kilometern pro Stunde und fahren mit einer Geschwindigkeit von 15 Kilometern pro Stunde. In welchem Abstand von Bdorf muss der Vorausfahrende das Rad ein letztes Mal liegen lassen, damit beide zeitgleich dort ankommen? (Preisrätsel aus Spektrum der Wissenschaft 11/2005, S. 110)