K. Gilles, April 2004, Logarithmen

Logarithmen

1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Jede positive Zahl $r > 0$ ist als Potenz einer beliebigen positiven Basis $a > 0$ in der Form $r = a^x$ darstellbar. Die eindeutig bestimmte Lösung x der Gleichung $r = a^x$ heißt Logarithmus von r zur Basis a. Symbolische Schreibweise:

$$x = \log_a r$$

r: Numerus ($r > 0$)
a: Basis ($a > 0,\ a \neq 0$)

Für jede Basis a gilt:
$\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0.$
$\log_a(a^x) = x$ (für $a > 0,\ a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$)
$a^{\log_a x} = x$ (für $a > 0,\ a \neq 0$ und $x > 0$)

2 Rechnen mit Logarithmen

2.1 Allgemeine Regeln

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
2. $\log_a \left(\frac{a}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
3. $\log_a \left(u^k\right) = k \cdot \log_a u$
4. $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$

2.2 spezielle Logarithmen

Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} r = \lg\ r$
Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus oder Logarithmus dualis): $\log_2 r = \mathrm{ld}\ r$
Natürlicher Logarithmus (Logarithmus naturalis): $\log_e r = \ln\ r$
$e = 2,718281\ldots =$ Eulersche Zahl

2.3 Umrechnung von der Basis a in die Basis b

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r$$

Regel: Beim Basiswechsel $a \to b$ werden die Logarithmen mit einer Konstanten K (dem Kehrwert von $\log_a b$) multipliziert.

3 Aufgaben

1. Bestimmen Sie x.

   (a) $\log_7 49 = x$

   (b) $\lg \frac{1}{10} = x$

   (c) $\log_x 8 = 3$

   (d) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$

   (e) $4^x = 64$

   (f) $2^x = \frac{1}{8}$

   (g) $\lg\ x = 3$

   (h) $\ln\ x = 2$

2. Wenden Sie die Logarithmengesetze an und berechnen Sie x.

   (a) $x = \lg\ 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

   (b) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

   (c) $x = \ln\ \frac{e^2}{\sqrt{e^3}}$

   (d) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

3. Fassen Sie zusammen.

   (a) $\lg a - \dfrac{1}{2} \lg b + \dfrac{4}{3} \lg c$

   (b) $\dfrac{1}{3} (\lg a + 3 \lg b) - \dfrac{1}{2} (4 \lg c - 2 \lg d)$

4. Berechnen Sie K.

   (a) $\ln r = K \cdot \lg r$

   (b) $\lg r = K \cdot \ln r$