K. Gilles, April 2004, Potenzen

Potenzen

1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Eine Potenz a^n ist ein Produkt aus n gleichen Faktoren a. Dabei ist a die Basis und n der Exponent oder die Hochzahl:
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

2 Rechnen mit Potenzen

Die folgenden Potenzgesetze gelten für alle rellen Basen ($a,\ b\ \in \mathbb{R}$) und alle ganzzahligen positive Exponenten ($m,\ n\ \in \mathbb{N}$).

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0$

Für $n = 0$ wird definiert: $a^0 = 1$.

Die Potenzgesetze gelten auch für **negative ganzzahlige Exponenten**, wenn man definiert: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

Bei der **Addition und Subtraktion** von Potenzen können nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten zusammengefasst werden:

$2 \cdot a^n + 4 \cdot a^n = 6 \cdot a^n$
$3 \cdot a^{n+1} + 2 \cdot a^n + 1 \cdot a^{n+1} - a^n = 4 \cdot a^{n+1} + a^n$

In einem **Produktterm** gilt der Exponent nur für die unmittelbar links stehende Zahl. Soll der Exponent für das gesamte Produkt gelten, so müssen Klammern gesetzt werden:

$2a^n = 2 \cdot (a^n)$
$(2a)^n = 2^n \cdot a^n$

Es ist zu beachten, dass die **Vorzeichen von Basis und Potenzwert** nicht identisch sind. Der Potenzwert einer positiven Basis ist immer positiv, dagegen ist der Potenzwert einer negativen Basis positiv, wenn der Exponent gerade ist, und negativ, wenn der Exponent ungerade ist:
$(+a)^{2n} = +a^{2n}$
$(-a)^{2n} = +a^{2n}$
$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$
$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
$n \in Z, a > 0$, d.h. $2n$ ist gerade, $2n+1$ ist ungerade.

3 Aufgaben:

1. Schreiben Sie als Potenzen:
   (a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$
   (b) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$
2. Fassen Sie zusammen:
   (a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$
   (b) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$
3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
   (a) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$
   (b) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$
   (c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$
4. Vereinfachen Sie:
   (a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$
   (b) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$
   (c) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$
   (d) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

(e) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^{0}} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$