Modellbildung: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Timm Grams, Fulda, 13. April 2004, http://www.fh-fulda.de/~grams

Zweck der Lektion

Erlernt und eingeübt wird die Modellierung von Zufallsereignissen. Durch vorsichtige Anwendung des Indifferenzprinzips (Gleichwahrscheinlichkeitsannahme) lassen sich berüchtigte Denkfallen der Wahrscheinlichkeitsrechnung umgehen[1].

Ein paar Fragen zum Einstieg

Katzenjunge: Eine Katze hat vier Junge bekommen. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, dass alle vier dasselbe Geschlecht haben. Mit größerer Wahrscheinlichkeit sind nur drei vom selben Geschlecht. Am wahrscheinlichsten sind zwei weibliche und zwei männliche Katzen. Sind diese Aussagen richtig?

Zweimal Münze werfen: Wie groß ist die Chance, dass bei zweimaligem Werfen einer Münze wenigstens einmal die Zahl fällt?

Drei Münzen werfen: Wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass beim Wurf dreier Münzen alle drei die gleiche Seite zeigen, sei es Kopf oder Zahl?

Drei-Türen-Problem: Große Fernsehshow. Der Supergewinn verbirgt sich hinter einer von drei Türen. Der Kandidat trifft seine Wahl. Die Tür wird jedoch zunächst nicht geöffnet. Der Showmaster öffnet eine der beiden anderen Türen, wohl wissend, dass dahinter eine Ziege als lebende Niete angepflockt ist. Der Showmaster stellt dem Kandidaten nun frei, bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben, oder die dritte der Türen zu öffnen. Soll er, oder soll er nicht?

So antwortet der gesunde Menschenverstand

Katzenjunge: Zwei männliche und zwei weibliche Katzen spiegeln am besten wieder, dass „Jungen“ und „Mädchen“ etwa mit derselben Wahrscheinlichkeit von 1/2 geboren werden. Ein Wurf mit gleich vielen „Jungen“ und „Mädchen“ ist ein *repräsentatives* Ergebnis. Daher ist dieses Ergebnis auch das wahrscheinlichste.

Zweimal Münze werfen: Es gibt drei Fälle: keine Zahl, einmal Zahl oder gar zweimal Zahl. Die beiden letzten Fälle sind für uns günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl sämtlicher Fälle. Die Wahrscheinlichkeit für wenigstens einmal Zahl ist demzufolge gleich 2/3.

Drei Münzen werfen: Wie der Wurf auch ausgeht, in jedem Fall sind entweder zweimal Kopf oder zweimal Zahl dabei. Die Wahrscheinlichkeit, dass auch die dritte Münze das gleiche Bild zeigt, ist gleich 1/2. Die Wahrscheinlichkeit für drei gleiche Bilder ist also gleich 1/2.

Drei-Türen-Problem: Zuerst ist zwischen drei Türen zu wählen. Jede Tür führt mit derselben Wahrscheinlichkeit von 1/3 zum Hauptgewinn. Nachdem der Showmaster eine Tür geöffnet

---

[1] Angeregt zu dieser Lektion wurde ich durch Reaktionen auf das Drei-Türen-Problem, das ich auf meiner Denkfallen-Seite bringe (www.fh-fulda.de/~grams). Folgende Quellen habe ich bei der Ausarbeitung benutzt:
- Lietzmann, W: Wo steckt der Fehler? Vierte Auflage. Teubner, Stuttgart 1962
- Gardner, M.. Gotcha. Hugendubel, München 1985
- Paulos, J. A.: Zahlenblind. Mathematisches Analphabetentum. (Orig.: Innumeracy). Heyne, München 1990
- Dewdney, A. K.: Mathematische Unterhaltungen. Spektrum der Wissenschaft (1990) 9, S. 14-19
- Stewart, I.: Mathematische Unterhaltungen. Spektrum der Wissenschaft (1991) 11, S. 12-16.

hat, kann der Hauptgewinn nur hinter einer der beiden anderen Türen sein. Die Wahrscheinlichkeiten sind jetzt halbe-halbe. Es ist also egal, welche Tür der Kandidat öffnet.

Modellierung

Sämtliche im letzten Abschnitt „hergeleiteten" Antworten sind falsch. Und nicht etwa fehlerhaftes Rechnen ist daran Schuld. Nein, bereits bei der mathematischen Modellierung ist etwas schief gelaufen. Die Ansätze sind verkehrt.

Bei der Katzenaufgabe geht der Trugschluss auf den Gebrauch einer Faustregel (Heuristik) - der so genannten *Repräsentativitätsheuristik* - zurück[2]. Mit Faustregeln ersparen wir uns die Mühsal logischer Schlussfolgerungen. So kommen wir oft schneller zum Ziel. Aber manchmal liegen wir damit auch verkehrt - so wie hier.

Die anderen Fehlschüsse kommen vom allzu sorglosen Umgang mit dem *Indifferenzprinzip*[3] und der daraus folgenden klassischen Formel für Wahrscheinlichkeiten:

> Die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ereignisses ist gleich der Anzahl aller möglichen günstigen Ergebnisse - auch: Elementarereignisse - geteilt durch die Anzahl aller möglichen Ergebnisse.

Für die korrekte Modellierung sind die Elementarereignisse so zu wählen, dass das Indifferenzprinzip anwendbar ist. Und das ist der zentrale Punkt!

Bei den ersten drei Aufgaben stellen wir die Ergebnisse als Folgen dar. Das exerzieren wir für die Katzenaufgabe einmal durch. Wir legen eine Reihenfolge der Katzen fest, beispielsweise durch die Reihenfolge, in der sie das Licht der Welt erblicken.

Folgende Ergebnisse sind möglich: Alle vier Katzen sind entweder weiblich oder männlich: wwww, mmmm; drei haben dasselbe Geschlecht: wmmm, mwmm, mmwm, mmmw, mwww, wmww, wwmw, wwwm; es gibt gleich viele weibliche und männliche Katzen: mmww, mwmw, mwwm, wmmw, wmwm, wwmm. Das sind 16 verschiedene Möglichkeiten.

Für jede Position in der Folge ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Geschlecht gleich 1/2. Dass ein bestimmtes Geschlecht auf erster Position steht, ist gleich 1/2. Verlangt man auch für die zweite Position ein bestimmtes Geschlecht, so halbiert sich diese Wahrscheinlichkeit. Die dritte Position führt zu einer weiteren Halbierung. Und das gilt auch für die vierte. Die Wahrscheinlichkeit für jede der möglichen Viererfolgen ist demnach gleich $(1/2)^4$ oder 1/16. Die Viererfolgen bilden also Elementarereignisse, auf die das Indifferenzprinzip anwendbar ist.

Genau so lassen sich auch die Ergebnisse der Münzwurf-Aufgaben modellieren: Gibt es für jede Position einer n-Folge genau zwei gleich wahrscheinliche Resultat und sind die Resultate für die einzelnen Stellen voneinander statistisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für jede der 2^n Folgen gleich $1/2^n$.

Beim Drei-Türen-Problem ist es noch einfacher: Es gibt von Beginn an drei Türen, hinter denen der Hauptgewinn mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit von 1/3 steckt.

---

[2] Daniel Kahneman (Nobelpreisträger Wirtschaftswissenschaften 2002) und Amos Tversky haben diese Heuristik - neben anderen - genauer untersucht.

[3] So hat der berühmte Volkswirtschaftler und Autor des Buches *A Treatise on Probability* John Maynard Keynes das „Prinzip vom mangelnden zureichenden Grunde" genannt: „Wenn keine Gründe dafür bekannt sind, um eines von verschiedenen möglichen Ereignissen zu begünstigen, dann sind die Ereignisse als gleich wahrscheinlich anzusehen" (zitiert nach Rudolf Carnap/Wolfgang Stegmüller: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Springer, Wien 1958).

Ergebnisse

Bei den *Katzenjungen* liefert die klassische Formel für Wahrscheinlichkeiten folgende Ergebnisse: Mit der Wahrscheinlichkeit 2/16 oder 1/8 haben alle Jungen dasselbe Geschlecht. Drei Junge mit demselben Geschlecht treten mit der Wahrscheinlichkeit 8/16, also 1/2, auf. Zwei weibliche und zwei männliche Katzen kommen mit der Wahrscheinlichkeit 6/16, also 3/8, vor. Das „repräsentative Ereignis“ ist demnach tatsächlich weniger wahrscheinlich als der Fall, dass unter vier Katzen genau eine ein anderes Geschlecht als die übrigen hat.

Beim *zweimaligen Münzwurf* unterscheiden wir den ersten und den zweiten Wurf. Unter den vier Möglichkeiten sind drei mit wenigstens einer Zahl. Also ist die Wahrscheinlichkeit für wenigstens eine Zahl gleich 3/4.

Beim *Wurf dreier Münzen* nummerieren wir die Münzen ebenfalls durch und erhalten die folgend acht gleich wahrscheinlichen Ergebnisse KKK, ZKK, KZK, KKZ, ZZK, ZKZ, KZZ, ZZZ. Zwei der Ergebnisse zeigen die gleiche Seite. Die Wahrscheinlichkeit diese Ereignisses ist also gleich 2/8 oder 1/4.

Beim *Drei-Türen-Problem* ist das Indifferenzprinzip nur auf die Ausgangssituation anwendbar. Durch das Öffnen einer Tür ändert der Quizmaster nichts daran, dass der Kandidat mit 1/3 Wahrscheinlichkeit richtig gelegen hat. Mit 2/3 Wahrscheinlichkeit ist der Hauptgewinn hinter einer der beiden anderen Türen. Der Quizmaster liefert nur die Information, welche der Türen der Kandidat ausschießen kann. Indem er sich für die andere noch verschlossene Tür entscheidet, verdoppelt der Kandidat seine Gewinnchancen auf 2/3.

Kontrolle

Zur Kontrolle kann man die Wahrscheinlichkeit des günstigen Ereignisse mit einem Zufallsexperiment abschätzen. Man führt den Versuche mehrmals durch und führt eine Statistik darüber. Schließlich bezieht man die erzielten günstigen Ereignisse auf die Gesamtzahl der Versuche. So erhält man einen Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Den Dreier-Münzwurf habe ich 40 mal wiederholt. In 8 Fällen zeigten alle Münzen die gleiche Seite. Der Schätzwert war also 8/40 oder 20 %. Das ist jedenfalls deutlich näher an dem richtigen Ergebnis von 25 % als an den zunächst „hergeleiteten“ 50 %.

Aufgaben

1 Wie groß ist die Chance für einen Sechser im Lotto (6 aus 49)?

2 In einem Stadtteil New Yorks, in dem 90 % Weiße und 10 % Schwarze wohnen, wird ein Mann überfallen. Er behauptet, der Täter sei ein Schwarzer gewesen. Als das Gericht den Vorfall unter ähnlichen Lichtverhältnissen mehrmals nachstellen lässt, kann das Opfer die Hautfarbe des Räuber-Darstellers nur in 80 % der Fälle richtig angeben; er täuscht sich bei Weißen ebenso oft wie bei Schwarzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der richtige Räuber tatsächlich schwarz war? Wir nehmen an, dass unter 1000 Weißen ebenso viele Leute bereit sind, einen Raubüberfall zu begehen, wie unter 1000 Schwarzen. *Tip:* Stellen Sie sich einen Stadtteil vor und nehmen Sie eine bestimmte Anzahl von Bewohnern - beispielsweise 10 000 - an.

3 Auf einer Party sind 23 Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei gibt, die an demselben Tag Geburtstag haben? (Hier müssen Sie etwas rechnen. Am besten machen Sie das mit einem Tabellenkalkulationsblatt auf dem Computer. Taschenrechner ist mühsam, geht aber auch.)

4 In einem Gutachten zur Konsumforschung steht[4]: „Interessant ist, dass über die Hälfte der Passanten täglich oder mehrmals pro Woche Fuldas Innenstadt aufsuchen. 25,8 Prozent kommen einmal pro Woche oder mindestens 14-täglich. Demnach kann davon ausgegangen werden, dass die Innenstadt ein umfangreiches Angebot für die Kunden bereithält.“

Was halten Sie von den Aussagen des Gutachtens? Werden die Aussagen durch die Statistik belegt? Lässt sich durch richtige Anwendung des Indifferenzprinzips Licht in die Angelegenheit bringen?

[4] Fuldaer Zeitung vom 1. September 1999, Seite 7