K. Gilles, April 2004, Wurzeln

Wurzeln

1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Löst man die Gleichung $x^n = a$ nach x auf, erhält man die n-te Wurzel aus a. a ist der Radikand, n ist der Wurzelexponent.

Schreibweise:
$x = \sqrt[n]{a}$ oder $x = a^{\frac{1}{n}}$ Es gelten die Rechenregeln für Potenzen.
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ Quadratwurzel aus a

2 Rechnen mit Wurzeln

1. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
4. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

für $a,\ b > 0$

Die Notwendigkeit, die Voraussetzung $(a,\ b > 0)$ für die Anwendung der Gesetze beim Rechnen mit Wurzel und Potenzen stets zu überprüfen, lässt sich durch folgende falsche Schlussweise demonstrieren:

$$\sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}} = (-a)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[a]{2} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Gleichheit besteht jedoch nur für den Fall $a = 0$. Für $a \neq 0$ ist entweder a oder $-a$ negativ und somit entweder $\sqrt{a}$ oder $\sqrt{-a}$ nicht definiert.

Für verschiedene Berechnungen ist es zweckmäßig, im Nenner eines Bruches auftretende Wurzeln zu beseitigen ("Rationalmachen des Nenners"):

$$\frac{Z}{\sqrt{a}} = \frac{Z \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{Z \cdot \sqrt{a}}{a}$$
$$\frac{Z}{\sqrt{a}+b} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a}+b) \cdot (\sqrt{a}-b)} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a})^2 - b^2} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a}-b)}{a - b^2}$$

3 Aufgaben

1. Berechnen Sie.

   (a) $6 \cdot \sqrt{27} + 2 \cdot \sqrt{108} - 7 \cdot \sqrt{75}$

   (b) $3 \cdot \sqrt[4]{256} - 4 \cdot \sqrt{49} - 7 \cdot \sqrt[3]{27} + 2 \cdot \sqrt[5]{32}$

   (c) $\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}$

   (d) $\dfrac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}}$

   (e) $\left(3 - \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right)$

   (f) $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$

   (g) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$

   (h) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6 \cdot b^{12}}}$

2. Formen Sie die Ausdrücke so um, dass im Nenner keine Wurzeln stehen.

   (a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$

   (b) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$

   (c) $\dfrac{13}{7 - \sqrt{10}}$

   (d) $\dfrac{7\sqrt{5} + 4\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}$