Gleichungen: Lösungen

1. $I = \dfrac{U}{R}$, sofern $R \neq 0$ bzw. $R = \dfrac{U}{I}$, sofern $I \neq 0$.

2. (a) Gegeben ist die Gleichung $y = \dfrac{x-1}{3x-2}$.

   Damit ihre rechte Seite überhaupt definiert ist, muß $3x - 2 \neq 0$, also $x \neq \frac{2}{3}$ sein. In diesem Fall ist die Multiplikation der Gleichung mit $3x-2$ eine umkehrbare Umformung; man erhält

   $$y \cdot (3x-2) = x - 1\,.$$

   Jetzt bringen wir alle Teilausdrücke, die x als Faktor enthalten, auf die linke Seite und alle anderen auf die rechte Seite der Gleichung, d.h., wir subtrahieren x und addieren $2y$; das ergibt

   $$y \cdot 3x - x = 2y - 1 \quad \text{bzw.} \quad (3y-1) \cdot x = 2y - 1$$

   Unter der Voraussetzung $y \neq \frac{1}{3}$ darf man hier durch $3y-1$ dividieren und erhält die nach x aufgelöste Gleichung

   $$x = \frac{2y-1}{3y-1}\,.$$

   (b) Dies ist nur ein Spezialfall von Teil (a). Man braucht lediglich in der nach x aufgelösten Gleichung $y = 5$ einzusetzen, dann erhält man

   $$x = \frac{2 \cdot 5 - 1}{3 \cdot 5 - 1} = \frac{9}{14}\,.$$

3. Die Antwort sagt: Nach 250 Schritt.

   Die Regel lautet: Lege hin [auf dem Rechenbrett] die 100 Schritt, die der rasch Gehende zurücklegt und ziehe ab die 60 Schritt, die der langsam Gehende zurücklegt; der Rest ist 40 Schritt. Nimm es als Divisor. Mit den 100 Schritt des rasch Gehenden multipliziere die 100 Schritt, die der langsam Gehende zuerst gegangen ist; das Produkt ist der Dividend. Teile den Dividenden durch den Divisor; du erhältst es in Schritt.

   Erklärung: Wenn der Verfolger 100 Schritt geht, holt er $100 - 60 = 40$ Schritt auf. Da 100 Schritt aufzuholen sind, geschieht dies nach $100 \cdot \frac{100}{40}$ Schritt.

   In zeitgemäßer Darstellung: Es sei x die Strecke in Schritt bis zum Treffpunkt. Während der Schnelle diese zurücklegt, legt der Langsame $\frac{60}{100} \cdot x$ Schritt zurück, hinzu kommt sein Vorsprung von 100 Schritt. Es gilt also die Gleichung

   $$x = \frac{60}{100} \cdot x + 100 \quad \text{mit der Lösung} \quad x = 250\,.$$

4. Mit $u = 2^x$ gilt $4^x = u^2$, $16^x = u^4$, also

   $$\begin{aligned} \frac{16^x - 1}{(4^x+1)(2^x+1)} &= \frac{u^4-1}{(u^2+1)(u+1)} = \frac{(u^2+1)(u^2-1)}{(u^2+1)(u+1)} = \frac{u^2-1}{u+1} \\ &= \frac{(u+1)(u-1)}{u+1} = u - 1 = 2^x - 1\,. \end{aligned}$$

5. (a) $x(x+7) - (x+1)^2 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 1 = 24, \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\,.$

   (b) $6(x^2 - 3x - 1) - (2x-1)(3x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x - 11 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{11}{5}\,.$

   (c) $\dfrac{x-2}{3x-4} = \dfrac{5x-6}{15x+8}$: Es muß $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}, -\frac{8}{15}\}$ sein; dann gilt

   $$\frac{x-2}{3x-4} = \frac{5x-6}{15x+8} \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(15x+8) = (5x-6)(3x-4), \quad \Leftrightarrow \quad -22x - 16 = -38x + 24,$$

   $$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{5}{2}\,.$$

(d) $\dfrac{2x+1}{4x^2+6x+1} = \dfrac{3x-2}{6x^2+2x-5}$: Für $4x^2+6x+1 \neq 0$ und $6x^2+2x-5 \neq 0$ gilt

$$\frac{2x+1}{4x^2+6x+1} = \frac{3x-2}{6x^2+2x-5} \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(6x^2+2x-5) = (3x-2)(4x^2+6x+1),$$
$$\Leftrightarrow \quad 12x^3+10x^2-8x-5 = 12x^3+10x^2-9x-2, \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Da die Nenner für $x = 3$ nicht verschwinden, handelt es sich tatsächlich um die Lösung der ursprünglichen Gleichung.

6. (a) $x^2-2x-63 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 64, \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = \pm 8, \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-7,\, 9\}.$

(b) $\dfrac{2}{x}+1 = \dfrac{6}{x+1}$: Es muß $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 0\}$ sein; dann gilt

$$\frac{2}{x}+1 = \frac{6}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1)+x(x+1) = 6x, \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2).$$

Die Lösungen der obigen Gleichung sind also $x = 1$ und $x = 2$.

(c) $13x^2-9x^4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^4-\frac{13}{9}x^2+\frac{4}{9} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-\frac{13}{18})^2 = \frac{13^2}{18^2}-\frac{4}{9} = \frac{25}{18^2},$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-\tfrac{13}{18} = \pm\tfrac{5}{18}, \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \in \{\tfrac{4}{9},\, 1\}, \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\tfrac{2}{3},\, \tfrac{2}{3},\, -1,\, 1\}.$$

(d) $\dfrac{2x+8}{x+3} - \dfrac{x-5}{x-4} = \dfrac{3x-5}{x^2-x-12} = \dfrac{3x-5}{(x+3)(x-4)}$: Es muß $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\, 4\}$ sein; dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2x+8}{x+3} - \frac{x-5}{x-4} = \frac{3x-5}{x^2-x-12} \quad &\Leftrightarrow \quad (2x+8)(x-4)-(x-5)(x+3) = 3x-5, \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-x = 12, \quad \Leftrightarrow \quad (x-\tfrac{1}{2})^2 = 12+\tfrac{1}{4} = \tfrac{49}{4}, \\ &\Leftrightarrow \quad x-\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{7}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3,\, 4\}. \end{aligned}$$

Da die Werte -3 und 4 für x aber ausgeschlossen sind, erweist sich die Gleichung als unlösbar.

7. (a) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5} = 7$:

Damit die Wurzeln definiert sind, muß $2x+7 \geq 0$ und $x-5 \geq 0$, insgesamt also $x \geq 5$ sein. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5} = 7 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+7} = 7-\sqrt{x-5}, \\ &\Rightarrow \quad 2x+7 = \left(7-\sqrt{x-5}\right)^2 = 49-14\sqrt{x-5}+x-5, \\ &\Leftrightarrow \quad x-37 = -14\sqrt{x-5}, \\ &\Rightarrow \quad x^2-74x+1369 = (x-37)^2 = 14^2(x-5) = 196x-980, \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-270x = -2349, \\ &\Leftrightarrow \quad (x-135)^2 = 135^2-2349 = 15876 = 126^2, \\ &\Leftrightarrow \quad x-135 = \pm 126, \quad x \in \{261,\, 9\}. \end{aligned}$$

Da nicht alle obigen Schlüsse umkehrbar sind, handelt es sich bei „$x \in \{261,\, 9\}$“ nur um eine **notwendige** Bedingung für die Lösungen der Gleichung. Welche der gefundenen Werte tatsächlich Lösungen sind, muß noch durch eine **Probe** überprüft werden:

Für $x = 261$ hat man $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5} = \sqrt{529}+\sqrt{256} = 23+16 \neq 7$
und für $x = 9$: $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5} = \sqrt{25}+\sqrt{4} = 5+2 = 7.$

Somit ist $x = 9$ die einzige Lösung der Gleichung.
Dagegen ist $x = 261$ ersichtlich eine Lösung der Gleichung $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-5} = 7$. Das ist kein Wunder, denn beim Quadrieren ist ja das Vorzeichen von $\sqrt{x-5}$ verlorengegangen.

(b) $\sqrt{5-3x}+\sqrt{3x-5} = 4$:

Damit die Wurzeln definiert sind, muß $5-3x \geq 0$ und $3x-5 \geq 0$, insgesamt also $5-3x = 0$ sein. Dann ist die linke Seite der Gleichung aber 0 und nicht 4. Also ist die Gleichung nicht lösbar.

8. (a) $(x+a)(x-b)-(x-a)(x+b)=(a-b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(a-b)x=(a-b)^2\,,$
$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}(a-b)\,,$ falls $a \neq b$. Im Fall $a=b$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Lösung der Gleichung.

(b) $\dfrac{x-b}{a}-\dfrac{x-a}{b}=0$: Die Gleichung ist nur für $ab \neq 0$ definiert und dann äquivalent zu

$$0 \;=\; b(x-b)-a(x-a) \;=\; (b-a)x-(b^2-a^2) \;=\; (b-a)(x-(a+b))\,.$$

Im Fall $a \neq b$ ist ihre einzige Lösung also $x=a+b$, und im Fall $a=b$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung.