Modellbildung: Textaufgaben

Timm Grams, Fulda, 23. April 2004

Lösungen

1 Von 27 aufgetragenen Klößen aß der erste 9, der zweite 6, der dritte 4.

2 Nach $\frac{12}{17}$ Stunden sind die drei mit der Mahlzeit fertig.

3 Augustus De Morgan ist 1806 in Madura (Indien) geboren.

4 Teil a: Es werden 18,11 Kernkraftwerke – quasi 19 Kernkraftwerke – benötigt. Tatsächlich waren im Jahr 2002 19 Kernkraftwerke in Deutschland im Betrieb. Teil b: Mit der gesamten elektrischen Energie können pro Bürger in Deutschland an jedem Tag ca. 952 Tassen Kaffee heiß gemacht werden.

5 *Zufallsbekanntschaften*: Wir nummerieren die Züge in beide Richtungen durch. Mit BA(k) bezeichnen wir die Abfahrtszeit des k-ten Zuges ab Buhlheide in Richtung Amorbad. Wir legen die Abfahrtzeit des Zuges mit Index 0 auf den Zeitnullpunkt und erhalten: BA(k) = k·10 min.

Dieser Zug muss um die gesuchte Zeit x vorher ab Casonovaweg gestartet sein: CB(k) = BA(k)-x = k·10 min - x.

Wie fahren nun die Züge in Gegenrichtung? Die Wartezeit zwischen den Zügen müssen so verteilt sein, dass man in Buhlheide auf den Zug Richtung Casanovaweg nur ein Viertel der Zeit warten muss, wie anschließend beim Zug in Richtung Amorbad. Nur so erreicht man beim zufälligen Eintreffen auf dem Bahnhof den Zug nach Amorbad im Mittel viermal häufiger als den Richtung Casanovaweg. Also: Der k-te Zug nach Casanovaweg[1] fährt ab Buhlheide 2 min später ab als der k-te Zug nach Amorbad: BC(k) = BA(k) + 2 min = k·10 min + 2 min. Die Züge ab Casanovaweg in Richtung Darlingen fahren jeweils um die Zeit x später: CD(k) = BC(k) + x = k·10 min + 2 min + x.

Am Casanovaweg stellen sich die Verhältnisse nun genau so dar, wie in Buhlheide, nur dass jetzt die Züge Richtung Buhlheide auf die in Richtung Darlingen in 2 min Abstand folgen. Es gibt also einen Zug j in Richtung Buhlheide, der dem Zug k in Richtung Darlingen in 2 min Abstand folgt. CB(j) = CD(k) + 2 min = k·10 min + 2 min + x + 2 min. Aber die Abfahrtszeiten CB(j) sind - wie bereits oben festgestellt worden ist - gegeben durch CB(j) = j·10 min - x. Gleichsetzen dieser beiden Werte führt auf die Gleichung

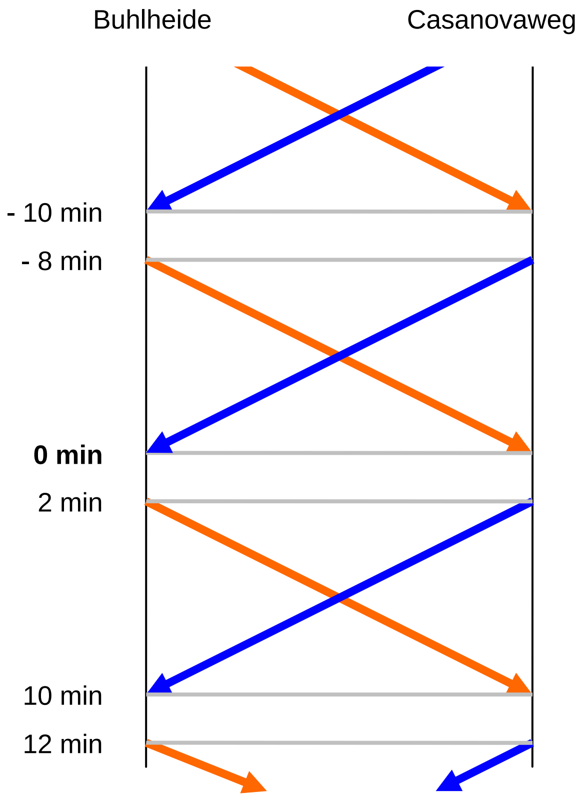
$$k\cdot 10 \text{ min} + 2 \text{ min} + x + 2 \text{ min} = j\cdot 10 \text{ min} - x.$$

Auflösen nach x liefert x = (j-k) ·5 min - 2 min. Für die Fahrtzeit kommen in Frage x = 3 min oder x = 8 min.

---

[1] Auch für die Züge in Gegenrichtung dürfen wir den Nullpunkt des Zählindex willkürlich festlegen.

Kontrolle, Validierung: Wir zeichnen den Fahrplan für die Strecke zwischen Buhlheide und Casanovaweg für den Fall einer Fahrzeit von 8 Minuten.



Der Plan zeigt die Übereinstimmung der Daten mit den gemachten Annahmen.

Überlegen Sie sich, wie der Plan abgeändert werden muss für den Fall, dass die Fahrzeit nur drei Minuten beträgt.

6 *Jans Kalkuhlation*: Für die verschiedenen Größen führen wir Variablen ein.

k: Anzahl der Kühe
f: Weidefläche
u: Wachstumsgeschwindigkeit des Grases (Grasmenge je Flächen- und Zeiteinheit)
v: Fressgeschwindigkeit der Kuh (Grasmenge je Tag)
a: Anfangsgrasmenge je Flächeneinheit. Diesen Wert setzen wir auf 1/a und beziehen alle anderen Grasmengen auf diese Einheit[2].

Die während der Zeit t verfügbare Grasmenge ist gleich $f\cdot(a + u\cdot t)$ bzw. $f\cdot(1/\mathrm{a} + u\cdot t)$. Die in dieser Zeit gefressene Grasmenge ist gleich $k\cdot v\cdot t$. Am Ende des Weidezeitraums stimmen beide Werte überein: $f\cdot(1/\mathrm{a} + u\cdot t) = k\cdot v\cdot t$. Wir setzten die Werte der Aufgabenstellung in diese Gleichung ein

$$20\ \mathrm{a}\cdot(1/\mathrm{a} + u\cdot 4\ \mathrm{d}) = 25\cdot v\cdot 4\ \mathrm{d}$$

$$24\ \mathrm{a}\cdot(1/\mathrm{a} + u\cdot 5\ \mathrm{d}) = 27\cdot v\cdot 5\ \mathrm{d}$$

Nach einfachen Umformungen ergeben sich daraus diese Gleichungen:

$$20 + 80\ \mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\cdot u = 100\ \mathrm{d}\cdot v \qquad (1)$$

$$24 + 120\ \mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\cdot u = 135\ \mathrm{d}\cdot v \qquad (2)$$

Gleichung (1) multiplizieren wir mit 1,5 und dann subtrahieren Gleichung (2) von Gleichung (1). Dadurch eliminieren wir u und erhalten $6 = 15\ \mathrm{d}\cdot v$ oder

$v = 6/(15\ \mathrm{d})$.

Jede Kuh frisst also 6/15 Mengeneinheiten pro Tag. Diesen Wert setzen wir in Gleichung (2) ein und erhalten $24 + 120\ \mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\cdot u = 54$. Daraus ergibt sich für die Wachstumsgeschwindigkeit des Grases der Wert

$u = 1/(4\ \mathrm{a}\cdot\mathrm{d})$,

das sind 1/4 Mengeneinheiten pro Ar und Tag.

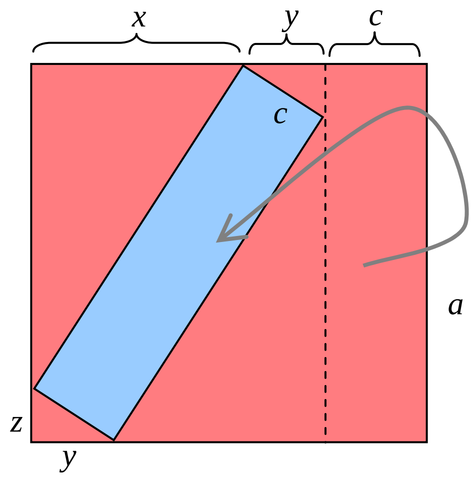
---

[2] Beachten Sie die Regeln für den Formelsatz: Ziffern (0, 1, 2, ...), Einheiten (wie das a für Ar) und Zeichen mit feststehender Bedeutung (sin, lim, ...) werde senkrecht geschrieben. Physikalische Größen (wie *m* für Masse) und Variable (wie hier das *a* für die Anfangsgrasmenge) sowie Funktionszeichen (wie das *g* in *g*(*x*)) werden kursiv geschrieben.

Kontrolle: Wir setzen die Werte für v und u in (1) und (2) ein und stellen fest: Die Gleichungen stimmen.

Wir suchen nun die Größe der Weidefläche f, auf der 100 Kühe 16 Tage grasen können: f·(1/a + 1/(4 a·d) · 16 d) = 100 · 6/(15 d)·16 d. Also f· 5/a = 640 oder f = 128 a. Die Weide muss 128 Ar umfassen.

7 *Die Bastelarbeit*: Wir führen außer der gesuchten Größe c noch die Hilfsgrößen x, y und z gemäß Skizze ein. Das sind die Entfernungen der Ecken des Streifens von den Ecken der Karte. Der Satz des Pythagoras liefert die folgenden Beziehungen für das Dreieck links oben und das Dreieck links unten:



$y^2 + z^2 = c^2$ (1)

Die Dreiecke links oben und links unten sind einander ähnlich. Der Strahlensatz liefert

$(a\text{-}z)/x = y/z$ (2)

$x/a = z/c$ (3)

Offenbar gilt

$x + y + c = a$ (4)

Wir haben vier Gleichungen für vier Unbekannte. Das Gleichungssystem sollte sich nach den Unbekannten auflösen lassen. Mittels (3) eliminieren wir z und erhalten das folgende Gleichungssystem.

$y^2 + (cx/a)^2 = c^2$

$a/x - c/a = a/x \cdot y/c$

$x + y + c = a$

Wir bringen dieses Gleichungssystem in eine etwas gefälligere Form. Alle eingeführten Variablen haben Werte größer null. Die Divisionen sind also durchführbar.

$(y/c)^2 + (x/a)^2 = 1$

$y/c = 1\text{-}\ c/a \cdot x/a$

$x/c + y/c + 1 = a/c$

In der ersten und der dritten Gleichung ersetzten wir y/c mit Hilfe der zweiten Gleichung. Das Gleichungssystem sieht nach kleineren Umformungen so aus:

$(1\text{-}\ c/a \cdot x/a)^2 + (x/a)^2 = 1$

$a/c \cdot x/a + 2\text{-}\ c/a \cdot x/a = a/c$

Die zweite Gleichung lösen wir nach x/a auf, $x/a = \dfrac{a/c-2}{a/c-c/a}$, und eliminieren diesen Quotienten aus der ersten Gleichung:

$$\left(1\text{-}\ c/a \cdot \frac{a/c-2}{a/c-c/a}\right)^2 + \left(\frac{a/c-2}{a/c-c/a}\right)^2 = 1$$

Diese Gleichung ist „nur” noch nach c/a aufzulösen. Im Laufe der Umformungen wird einmal die linke wie die rechte Seite durch $(a/c\text{-}2)/(a/c\text{-}c/a)$ dividiert. Das geht nur, wenn dieser Quotient ungleich null ist.

Der Fall, dass der Quotient gleich null ist, liefert bereits eine Lösung, nämlich $c = a/2$. Also: Das Blatt wird halbiert und die Hälften werden deckungsgleich aufeinander geklebt. Diese Lösung ist Paula sicherlich zu schmucklos.

Wir suchen nach einer weiteren Lösung. Der Quotient kann nun als ungleich null vorausgesetzt werden. Die Division ist durchführbar. Wir erhalten schließlich die Gleichung $c/a + a/c = 4$. Sie hat die beiden Lösungen

$c/a = 2 \pm \sqrt{3}$.

Nur die Lösung mit negativem Vorzeichen der Wurzel ergibt einen Sinn, denn c muss kleiner als a sein. Damit ist die Aufgabe gelöst: $c = a \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx a \cdot 0{,}268$.

Das war eine Lösung „auf der Ochsentour“ - mit viel Rechnerei. Es gibt elegantere Ansätze. Einer ist im Mai-Heft 2004 von Spektrum der Wissenschaft auf Seite 123 veröffentlicht.

Kontrolle, Validierung: Auf meinem Schreibtisch liegen quadratische Merkzettel mit der Kantenlänge 89 mm. Ich nehme einen davon, trenne einen Streifen von knapp 24 mm (≈ 89 mm · 0,268) Breite ab und sehe: es klappt. (Albrecht Beutelspacher, Gießen: „Mathematik ist die Wissenschaft vom Klappen.“)