Modellbildung: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Timm Grams, Fulda, 13. April 2004

Lösungen zu den Aufgaben

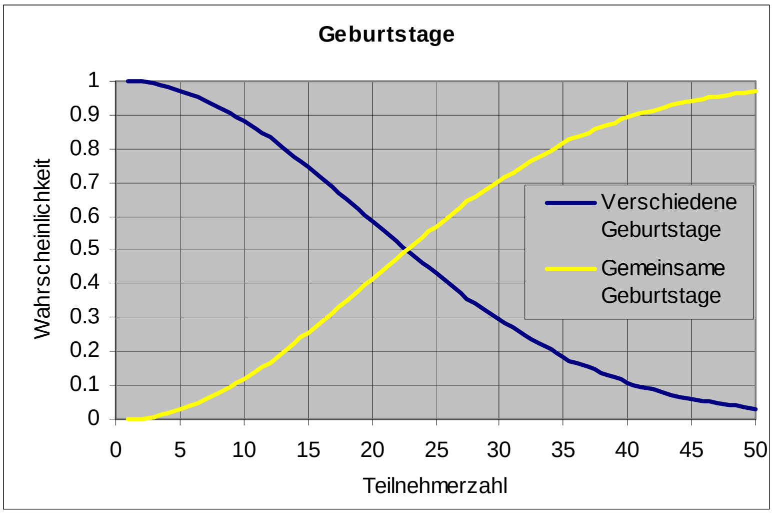
1 Für das Lottospiel 6 aus 49 bilden wir die Folgen von gezogenen Zahlen. Für die erste Zahl gibt es 49 Möglichkeiten, für die zweite noch 48. Insgesamt haben wir 49·48 Zweierfolgen mit bestimmter Reihenfolge. Ziehen wir nun eine dritte Zahl, so erhöht sich die Zahl der Möglichkeiten um den Faktor 47, usw. Es gibt insgesamt 49·48·47·46·45·44 verschiedene Sechserfolgen. Dies Folgen sind alle gleich wahrscheinlich. Unter den Sechserfolgen sind auch Gewinnfolgen, und zwar mehrere: die kleinste Zahl kann als erste, als zweite, als dritte, ..., als sechste gezogen werden. Für die kleinste Zahl gibt es also 6 verschiedene Positionen. Für jede dieser Positionen bleiben noch 5 Positionen für die nächst größere Zahl übrig. Die dritte Zahl kann dann auf noch 4 Positionen untergebracht werden usw. Da heißt: Es gibt 6·5·4·3·2·1 verschieden Sechserfolgen mit den Gewinnzahlen. Diese Zahl teilen wir durch die Gesamtzahl der Sechserfolgen und erhalten die Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}$. Und diese Zahl ist etwa gleich 0,0000000715. Überlegen Sie, wie lange Sie im Mittel auf den Lottogewinn warten müssen.

2 Nehmen wir einmal an, dass in dem Stadtteil 10 000 Menschen wohnen. Darunter sind 9 000 Weiße und 1000 Schwarze. Wir nehmen ferner an, dass das Opfer auf jeden dieser Menschen mit derselben Wahrscheinlichkeit trifft. 20% der 9 000 Weißen würde er für Schwarze halten. Also sind 1 800 der Weißen mögliche Täter. Von den 1000 Schwarzen hätte er 800 tatsächlich für Schwarze gehalten. Auch sie mögliche Täter. Unter den 2 600 in Frage kommenden Tätern sind tatsächlich nur 800 Schwarze, das ist ein Anteil von 800/2 600. Also mit nur knapp 31 % handelt es sich bei dem Täter tatsächlich um einen Schwarzen.

3 Das Jahr hat 365 Tage. (Das Schaltjahr lassen wir hier einmal beiseite.) Wenn man die Zahl 365 23 mal mit sich selbst multipliziert, erhält man die Zahl aller Möglichkeiten für die Geburtstage der Personen. In Potenzschreibweise liest sich die Anzahl der Möglichkeiten so: 365^{23}. Jede dieser Möglichkeiten wollen wir als gleich wahrscheinlich ansehen. Damit haben wir die Elementarereignisse, für die wir das Indifferenzprinzip annehmen wollen. (Überlegen Sie, welche Gründe es geben könnte, vom Indifferenzprinzip Abstand zu nehmen. Bei genaueren Untersuchungen helfen dann freilich nur noch Statistiken.)

Jetzt wollen wir die Fälle betrachten, in denen gemeinsame Geburtstage vorkommen. Allerdings ist es einfacher, zunächst alle anderen Fälle aufzuzählen. Wir suchen also nach den Fällen, bei denen es keine gemeinsamen Geburtstage gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für gemeinsame Geburtstage erhalten wir dann, indem wir die Wahrscheinlichkeit für keine gemeinsamen Geburtstage von eins abziehen.

Die Zahl der Möglichkeiten, bei denen kein gemeinsamer Geburtstag vorkommt, ergibt sich folgendermaßen: Für die erste Person ist die Wahl frei, es gibt 365 mögliche Geburtstage. Wenn der Geburtstag der ersten Person fest liegt, gibt es für die zweite noch 364 mögliche Geburtstage, usw. Insgesamt ist die Zahl der Möglichkeiten gleich 365·364·363· ... ·343. Das Verhältnis dieser Zahl zur Gesamtzahl der Ergebnisse ist gleich $\frac{365\cdot364\cdot\ldots\cdot343}{365\cdot365\cdot\ldots\cdot365}$. Es ergibt sich (auf zwei Stellen nach dem Komma genau) der Wert 0,49. Das heißt umgekehrt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, über 50 % liegt. Hätten Sie das gedacht? Wir haben hier ein schönes Beispiel für die Volksweisheit „Unverhofft kommt oft“.

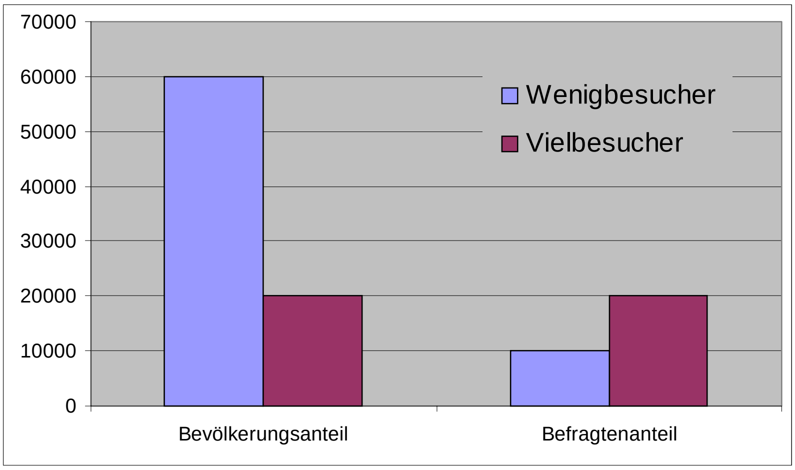


Wie sieht es bei kleineren und bei größeren Partys aus? Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene bzw. gemeinsame Geburtstage in Abhängigkeit von der Teilnehmerzahl. Bei 41 Teilnehmern liegt die Wahrscheinlichkeit gemeinsamer Geburtstage schon bei 90 %.

4 Offenbar ist beabsichtigt, die Tatsache, dass immerhin 50 % der angetroffenen Passanten täglich, und nur 25 % wöchentlich kommen, als Zeichen der Attraktivität Fuldas hinzustellen. Zwischen Statistik und Schlussfolgerung gibt es aber keinerlei Zusammenhang, geschweige denn eine Ursache-Wirkungs-Beziehung.

Ein grundlegender methodischer Mangel dieser Argumentation ist, dass nur befragt werden kann, wer *da* ist. Nach der Logik des Gutachtens ließe sich andersherum auch schließen, dass es überhaupt niemanden gibt, der nicht nach Fulda kommt: Von solchen Leuten wurde ja keiner angetroffen!

Diejenigen, die häufiger kommen, stellen naturgemäß einen größeren Anteil der Befragten. Selbst wenn der Bevölkerungsanteil der nur wöchentlich einmal in die Stadt kommenden Leute dreimal so groß ist wie der Anteil derjenigen, die täglich kommen, wird man unter den Passanten nur auf etwa halb so viele der selteneren Besucher stoßen (vorausgesetzt, alle verweilen etwa gleich lange in der Stadt.)



Der Auswahlprozess der Umfrage trifft im Idealfall *jeden gerade in Fulda Anwesenden* mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Aber das ist eine ziemlich uninteressante und irreführende Anwendung des Indifferenzprinzips. Interessanter wäre gewesen, wenn *jeder erwachsene Bewohner* - beispielsweise des Landkreises Fulda - mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt worden wäre. Dann bezögen sich die Aussagen des Gutachtens auf die leibhaftigen Bewohner des Kreises, und nicht nur auf die zufällig gerade in Fulda Anwesenden. Damit hätte man etwas anfangen können.