Volumenberechnungen

Dr. H. Macholdt

18. Mai 2004

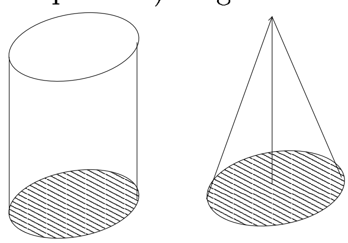
1 Ermittlung der Volumenformeln

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben mache man sich zunächst Gedanken darüber, welche Form der Körper hat und gehe dann nach folgendem Schema vor, um die Volumenformeln des jeweiligen Körpers zu ermitteln:

1. Prismatische Körper: Ein Prisma ist ein Körper, dessen Grundfläche sich gleichmäßig nach oben hin fortsetzt. Die Formeln zur Berechnung des Volumens von prismatischen Körpern ergeben sich demnach aus:

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \text{Grundfläche} * \text{Höhe} \\ V &= A \cdot h \end{aligned}$$

   Als Grundfläche A wird dann die Formel für die jeweilige Fläche (Rechteck, Dreieck, Trapez, Kreis, Ellipse o.a.) eingesetzt.



2. Pyramidenförmige Körper: Die Grundfläche bei pyramidenförmigen Körpern setzt sich ebenfalls nach oben hin fort ohne ihre Form zu ändern, sie wird allerdings immer kleiner bis sie in einer Spitze, die sich in der Höhe h über der Grundfläche A befindet, endet. Für das Volumen eines pyramidenförmigen Körpers gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \frac{1}{3} * \text{Grundfläche} * \text{Höhe} \\ V &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot h \end{aligned}$$

   Auch hier ermittle man zunächst die Formel für die jeweilige Fläche A.

3. Kugelvolumen: Das Volumen der Kugel hängt nur von ihrem Radius r ab:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

2 Aufgaben

Das Volumen wird üblicherweise in m^3 oder dm^3 = 1 Liter oder cm^3 = 1 Milliliter angegeben. Man beachte das zwischen benachbarten Einheiten ein Umrechnungsfaktor von 1000 besteht, also:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 \qquad 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 \qquad 1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

1. Welches Volumen hat ein zylindrischer Behälter mit einem Durchmesser von 22 dm und einer Höhe von 420 cm ?

2. Es werden 620 Liter Wasser in einen rechteckigen Behälter gegossen. Wie hoch steht die Flüssigkeit, wenn der Behälter 6 m lang und 5,7 m breit ist.

3. Aus einem aufrechtstehenden zylindrischen Tank mit den Innenmaßen $h = 3,2$ m und $d = 1,2$ m werden 385 Liter einer Flüssigkeit der Dichte $\rho = 0,87$ kg/dm^3 entnommen.

   (a) Wie hoch steht die Flüssigkeit nach der Entnahme, wenn der Tank vorher nur zu 81% seines Volumens gefüllt war?

   (b) Wieviel Kilogramm der Flüssigkeit befinden sich noch im Tank?

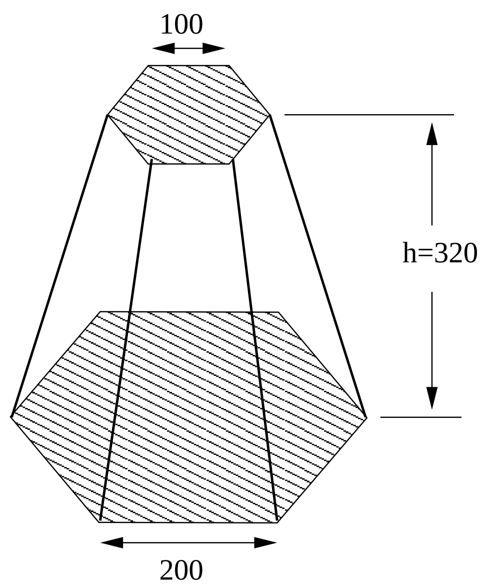
4. Ein Kegel mit dem Durchmesser $d = 32$ cm und einer Höhe von $h = 57$ cm besteht aus reinem Kupfer der Dichte $\rho_{Cu} = 8,9$ g/cm^3.

   (a) Welches Volumen hat der Kegel?

   (b) Berechnen Sie das Gewicht des Kegels in Kilogramm.

   (c) Welchen Durchmesser müsste eine Kugel aus Aluminium mit $\rho_{Al} = 2,7$ g/cm^3 haben, damit Sie genau so schwer wie der obige Kegel ist?

5. Berechnen Sie das Volumen des abgebildeten sechseckigen Pyramidenstumpfes.



3 Lösungen

1. Die Grundfläche ist kreisförmig, also gilt: $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$.

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h = \frac{(22 \text{ dm})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 42 \text{ dm} = 15965,57 \text{ dm}^3$$

2. Die Grundfläche ist $A = 6 \text{ m} \cdot 5,7 \text{ m} = 34,2 \text{ m}^2$

$$V = A \cdot h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{V}{A} = \frac{0,62 \text{ m}^3}{34,2 \text{ m}^2} = 0,018 \text{ m} = 1,8 \text{ cm}$$

3. Das Volumen des gesamten Tanks ist

$$V = \frac{(12 \text{ dm})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 32 \text{ dm} = 3619 \text{ dm}^3$$

   (a) Flüssigkeit vor der Entnahme (81%):

$$V_1 = V \cdot \frac{81}{100} = 2931,5 \text{ dm}^3$$

   Flüssigkeit nach der Entnahme:

$$V_2 = V_1 - 385 \text{ dm}^3 = 2546,5 \text{ dm}^3$$

   Flüssigkeitshöhe:

$$h = \frac{V_2}{A} = \frac{2546,5 \text{ dm}^3 \cdot 4}{(12 \text{ dm})^2 \cdot \pi} = 22,5 \text{ dm} = 2,25 \text{ m}$$

   (b) Masse der Flüssigkeit:

$$m = \rho \cdot V_2 = 0,87 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 2546,5 \text{ dm}^3 = 2215,5 \text{ kg}$$

4. Das Volumen des Kegels ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$$

   (a) also ist das Kegelvolumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(32 \text{ cm})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 57 \text{ cm} = 15280,7 \text{ cm}^3$$

   (b) Gewicht des Kegels:

$$m = \rho_{Cu} \cdot V = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 15280,7 \text{ cm}^3 = 136 \text{ kg}$$

(c) Eine Kugel aus Aluminium mit dem gleichen Gewicht wie der Kegel hat ein Volumen von

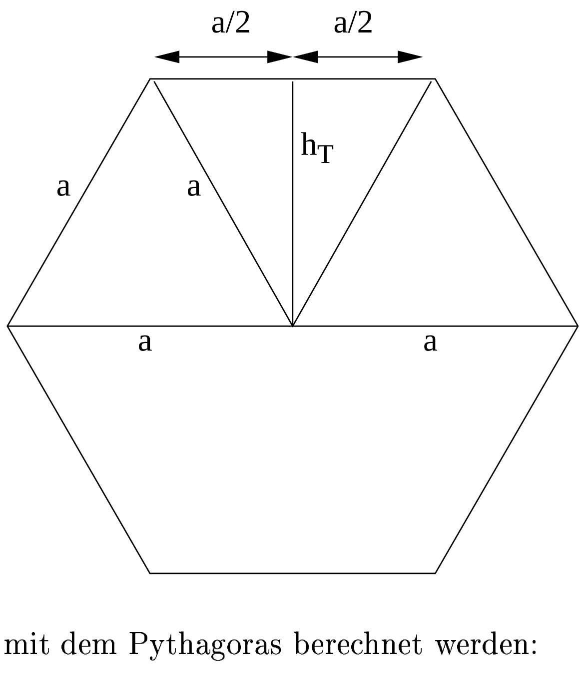
$$V = \frac{m}{\rho_{Al}} = \frac{136000 \text{ g}}{2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 50370 \text{ cm}^3$$

also ergibt sich folgender Radius

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 50370 \text{ cm}^3}{4 \cdot \pi}} = 22,9 \text{ cm}$$
$$\Rightarrow d = 45,5 \text{ cm}$$

5. Wir berechnen das Volumen des pyramidenförmigen Stumpfes, in dem wir von einer vollständigen Pyramide ausgehen und deren Spitze abschneiden. Dazu benötigen wir aber die Höhe H der vollständigen Pyramide. Auf einer Strecke von 320 mm verjüngt sich die Seite der Pyramide auf die Hälfte der ursprünglichen Strecke (von 200 mm auf 100 mm). Daraus kann man schließen, das eine vollständige Pyramide eine Gesamthöhe $H = 640$ mm hat (Strahlensatz).
Die Grundfläche eines Sechsecks besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken oder zwei Trapezen mit einer gesamten Grundfläche

$$A = 2 \cdot \frac{2 \cdot a + a}{2} \cdot h_T = 3 \cdot a \cdot h_T$$



Die Höhe h_T des Trapezes kann mit dem Pythagoras berechnet werden:

$$h_T = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Die Grundfläche ergibt sich somit zu

$$A = 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

Und das Volumen der ganzen Pyramide mit der Höhe H ist dann

$$\begin{aligned} V_G &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot H \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2 \text{ dm})^2 \cdot 6,4 \text{ dm} = 22,17 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

und analog das Volumen der Spitze

$$V_S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 \text{ dm})^2 \cdot 3,2 \text{ dm} = 2,77 \text{ dm}^3$$

Ziehen wir beide Werte voneinander ab, so erhalten wir das gesuchte Volumen des Pyramidenstumpfes:

$$V = V_G - V_S = 22,17 \text{ dm}^3 - 2,77 \text{ dm}^3 = 19,4 \text{ dm}^3$$