

# Zahlenrechnung

# Division

Zweck der Lektion ist das Verstehen und Einüben grundlegender Rechenverfahren (Algorithmen).

Diese Lektion enthält Animationen. Um den Effekt einer Diaschau zu erzielen, wählen Sie in Acrobat Reader die *Ganzseitenansicht* und schalten die Seiten mit den Bildwechseltasten weiter.

# Division mit Rest

## Aufgabenstellung

*Aufgabe:* Geben Sie das ganzzahlige Ergebnis der Division  $1234 : 5$  an.

*Lösung:* Es gilt  $1234 = 5 \cdot 246 + 4$ . Das Divisionsergebnis ist gleich **246** und der Rest gleich **4**.

In der Schule schreibt man auch „ $1234:5 = 246$  Rest **4**“. Das sieht wie eine Gleichung aus, ist aber keine. Denn „**246** Rest **4**“ ist mehrdeutig. Wir vermeiden diese Schreibweise.

*Allgemeine Aufgabenstellung:* Dividieren Sie die nicht negative ganze Zahl  $a$  (hier: 1234) durch die positive ganze Zahl  $b$  (hier: 5). Geben Sie das ganzzahlige Divisionsergebnis und den Rest an.

# Division mit Rest

## Begriffe

$$1234 = 5 \cdot 246 + 4$$

$$a = b \cdot x + r$$

Rest:  $0 \leq r < b$

Ganzzahliger Quotient  
Divisionsergebnis

Divisor

Dividend

# Ein Rechenverfahren

Ganzzahlige Division als fortlaufendes Subtrahieren

$$1234 - 5 = 1229 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 1 + 1229$$

# Ein Rechenverfahren

Ganzzahlige Division als fortlaufendes Subtrahieren

$$1234 - 5 = 1229 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 1 + 1229$$

$$1229 - 5 = 1224 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 2 + 1224$$

# Ein Rechenverfahren

Ganzzahlige Division als fortlaufendes Subtrahieren

$$1234 - 5 = 1229 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 1 + 1229$$

$$1229 - 5 = 1224 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 2 + 1224$$

$$1224 - 5 = 1219 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 3 + 1219$$

...

# Ein Rechenverfahren

Ganzzahlige Division als fortlaufendes Subtrahieren

$$1234 - 5 = 1229 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 1 + 1229$$

$$1229 - 5 = 1224 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 2 + 1224$$

$$1224 - 5 = 1219 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 3 + 1219$$

...

$$19 - 5 = 14 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 244 + 14$$

$$14 - 5 = 9 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 245 + 9$$

$$9 - 5 = 4 \quad \rightarrow 1234 = 5 \cdot 246 + 4$$

Fertig, da die Bedingung  $0 \leq r < b$  erfüllt ist.

# Ein gieriges Rechenverfahren

In der Schule wird ein Rechenschema für die Division gelehrt, das zur Klasse der *gierigen Rechenverfahren* (Greedy Algorithms) gehört - die so genannte „schriftliche Division“.

Hier geht es darum, das Prinzip hervorzuheben. Der Rechengang wird zu diesem Zweck unter alleiniger Verwendung der mathematischen Standardnotation (Gleichungen) formuliert.

Danach wird der Zusammenhang mit dem bekannten Rechenschema hergestellt.

# Ein gieriges Rechenverfahren

Im Fall der ganzzahligen Division bedeutet „gierig“, dass man nicht mühselig Schritt für Schritt den Divisor vom Dividenden bzw. vom noch verbleibenden Rest abzieht, sondern dass man Vielfache des Divisors subtrahiert. Dabei wird bei der Abschätzung der Vielfachheit darauf geachtet, dass dieser Wert einerseits möglichst groß und dass er andererseits einfach abzuschätzen ist.

# Ein gieriges Rechenverfahren

Das Vielfache bestimmen wir nach folgender Regel: Erst multiplizieren wir den Divisor so oft mit **10** bis eine Zahl entsteht, die gerade noch kleiner oder gleich dem Dividenden ist. Dann multiplizieren wir diese Zahl mit einer **passenden Zahl kleiner als 10** um noch näher an den Dividenden heranzukommen. Also:

$$1234 - 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 234 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 200 + 234$$

# Ein gieriges Rechenverfahren

Das Vielfache bestimmen wir nach folgender Regel: Erst multiplizieren wir den Divisor so oft mit **10** bis eine Zahl entsteht, die gerade noch kleiner oder gleich dem Dividenden ist. Dann multiplizieren wir diese Zahl mit einer **passenden Zahl kleiner als 10** um noch näher an den Dividenden heranzukommen. Also:

$$1234 - 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 234 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 200 + 234$$

Das wiederholen wir für den Rest anstelle des Dividenden:

$$234 - 5 \cdot 10 \cdot 4 = 34 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 240 + 34$$

# Ein gieriges Rechenverfahren

Das Vielfache bestimmen wir nach folgender Regel: Erst multiplizieren wir den Divisor so oft mit **10** bis eine Zahl entsteht, die gerade noch kleiner oder gleich dem Dividenden ist. Dann multiplizieren wir diese Zahl mit einer **passenden Zahl kleiner als 10** um noch näher an den Dividenden heranzukommen. Also:

$$1234 - 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 234 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 200 + 234$$

Das wiederholen wir für den Rest anstelle des Dividenden:

$$234 - 5 \cdot 10 \cdot 4 = 34 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 240 + 34$$

$$34 - 5 \cdot 6 = 4 \quad \rightarrow \quad 1234 = 5 \cdot 246 + 4$$

Fertig

# Schriftliche Division

Das gierige Rechenverfahren bringen wir in das von der Schule bekannte Schema der „schriftlichen Division“:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ -10 \\ \hline 234 \end{array} = 5 \cdot 200 + 234$$

The diagram illustrates the decomposition of the number 1234. On the left, a vertical subtraction shows 1234 minus 10, resulting in 234. On the right, the equation 1234 = 5 · 200 + 234 is shown. The number 200 is colored blue, and 234 is colored yellow. Two arrows originate from the 200: one points from the '2' to the '2' in 234, and another points from the '0' to the '10' in the subtraction step.

# Schriftliche Division

Das gierige Rechenverfahren bringen wir in das von der Schule bekannte Schema der „schriftlichen Division“:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ -10 \\ \hline 234 \\ -20 \\ \hline 34 \end{array} = 5 \cdot \mathbf{240} + \mathbf{34}$$

# Schriftliche Division

Das gierige Rechenverfahren bringen wir in das von der Schule bekannte Schema der „schriftlichen Division“:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ -10 \\ \hline 234 \\ -20 \\ \hline 34 \\ -30 \\ \hline 4 \end{array} = 5 \cdot 246 + 4$$

# Division bei mehrstelligem Divisor

$$12345 = 67 \cdot 184 + 17$$

The diagram illustrates the long division of 12345 by 67. The quotient is 184 and the remainder is 17. The steps are as follows:

- 12345
- 67 ← (Arrow from the '1' in 184 to the '6' in 67)
- 5645
- 536 ← (Arrow from the '8' in 184 to the '536' in 536)
- 285
- 268 ← (Arrow from the '4' in 184 to the '268' in 268)
- 17 ← (Arrow from the '17' in the remainder to the '17' in the final result)

# Division von Dezimalbrüchen

Die Zahl 32,14 lesen wir „zweiunddreißig-Komma-eins-vier“. Sie hat den Wert

$$32 + \frac{14}{100}$$

*Aufgabe:* Die Zahl 32,14 soll durch die Zahl 7,5 dividiert werden. Der Quotient ist auf zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt genau anzugeben.

# Rechengang zur Berechnung des Quotienten $32,14 : 7,5$

1. Den Divisor ganzzahlig machen. Dazu werden Dividend und Divisor (notfalls mehrmals) mit dem Faktor 10 multipliziert.

$$32,14 : 7,5 = 321,4 : 75$$

2. Durchführen der Division (auf den folgenden Seiten)

$$321,4 : 75 = ?$$

$$\begin{array}{r} 321,4 \\ -300 \\ \hline 21,4 \end{array} = 75 \cdot 4 \dots$$

Der Rest ist jetzt kleiner als der Divisor. Wir führen das Verfahren fort, indem wir den Divisor mit Vielfachen von  $1/10$ , dann mit Vielfachen von  $1/100$ , usw. multiplizieren.

$$321,4 : 75 = ?$$

$$\begin{array}{r} 321,4 \\ -300 \\ \hline 21,4 \\ -15,0 \\ \hline 6,40 \end{array} = 75 \cdot 4,2\dots$$

$$321,4 : 75 = ?$$

$$\begin{array}{r} 321,4 \\ -300 \\ \hline 21,4 \\ -15,0 \\ \hline 6,40 \\ -6,00 \\ \hline 0,400 \end{array} = 75 \cdot 4,28\dots$$

The diagram illustrates the long division of 321,4 by 75. The quotient is 4,28... with ellipses. Three arrows point from the digits 4, 2, and 8 in the quotient to the corresponding subtractions: -300, -15,0, and -6,00. The final remainder is 0,400.

$$321,4 : 75 = ?$$

$$\begin{array}{r} 321,4 \\ -300 \\ \hline 21,4 \\ -15,0 \\ \hline 6,40 \\ -6,00 \\ \hline 0,400 \\ -0,375 \\ \hline 0,025 \end{array} = 75 \cdot 4,285\dots$$

Jetzt noch runden

$$321,4 : 75 = ?$$

$$321,4 \approx 75 \cdot 4,29$$

Dabei wurde die Regel verwendet: *Aufrunden*, wenn die folgende Ziffer wenigstens gleich 5 ist, sonst *abrunden* (also einfach abschneiden). So wird der Rundungsfehler minimal.

$$321,4 : 75 = ?$$

$$321,4 \approx 75 \cdot 4,29$$

Dabei wurde die Regel verwendet: *Aufrunden*, wenn die folgende Ziffer wenigstens gleich 5 ist, sonst *abrunden* (also einfach abschneiden). So wird der Rundungsfehler minimal.

Damit haben wir die Lösung der Aufgabe:

$$32,14 : 7,5 = 321,4 : 75 \approx 4,29$$

Fertig

# Aufgaben

Alle Aufgaben sollen „von Hand“, also mit Papier und Stift und vor allem ohne Taschenrechner und Computer, gelöst werden. Sonst wird der Zweck verfehlt.

(Ein Lösungsblatt gibt es zu diesen Aufgaben nicht. Sie können Ihre Lösungen mittels Taschenrechner überprüfen.)

1. Führen Sie für  $36581 : 13$  die ganzzahlige Division mit Rest durch.
2. Berechnen Sie  $639,67 : 3,14$  auf drei Stellen nach dem Komma.