Rechnen mit Dualzahlen

Timm Grams, Fulda, 19. März 2012 (aktualisiert: 24.02.13)

Übungen zur Vorbereitung

1 Aus 10 Kärtchen mit den Zahlen 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53 und 68 sind möglichst wenige auszuwählen, so dass sich die Summe 100 ergibt. Wie groß ist die Anzahl der minimal notwendigen Kärtchen und mit welchen Kärtchen klappt es?

2 Einfachere Variante: Wir nehmen nun die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 und 512, die wir durch fortlaufende Verdopplung erhalten. Stellen Sie die Zahlen 235, 555, 222 und 789 jeweils durch eine geeignete Auswahl dar. Überlegen Sie sich, wie Sie jede dieser Auswahlen durch eine Folge von Nullen und Einsen repräsentieren können. Beweisen Sie, dass sich jede ganze Zahl von 0 bis 1023 derartig als Bitmuster (Bit = Binary Digit = Binärzeichen = 0 oder 1) darstellen lässt. Bedenken Sie, dass wir im Dezimalsystem die niedrigstwertige Stelle rechts und die höchstwertige Stelle am weitesten links notieren. Kleine Hilfe: Jede der Zahlen der vorgegebenen Folge ist um eins größer als die Summe ihrer Vorgänger.

Zahlendarstellung im Binärsystem

Auf einem Rechenbrett, das aus einer Folge von rechteckigen Feldern mit zugeordneten Wertigkeiten besteht, können wir Zahlen dadurch repräsentieren, dass wir die Felder der Zahlen, die in der Summe die darzustellende Zahl ergeben, mit einem Steinchen belegen oder sonst wie markieren. Die Zahl 733 entspricht dieser Belegung:

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
●		●	●		●	●	●		●

Jedes belegte Feld notieren wir als 1 und jedes nichtbelegte als 0. Die obige Belegung entspricht also dem Bitmuster 1011011101; das ist die Darstellung der Zahl 733 im Binärsystem (Dualsystem).

Das Rechnen im Binärsystem fällt leichter, wenn man bei der Umwandlung ins Binärsystem folgendes Verfahren wählt: Stellen Sie sich vor, wir repräsentieren jede Zahl durch eine entsprechende Zahl von Steinchen. Zu Beginn legen wir sämtliche Steinchen in das Feld mit der Wertigkeit 1. Das ist eine durchaus gültige Repräsentation der Zahl, wenngleich nicht besonders einfallsreich; und es werden reichlich Steinchen benötigt. Bei der Beispielszahl sind es eben 733.

Jetzt fassen wir die Steinchen paarweise zusammen. Eins bleibt ungepaart. Das lassen wir in dem Feld der Wertigkeit 1 liegen. Von den Paaren nehmen wir jeweils ein Steinchen in das Feld links daneben und das andere legen wir beiseite. Auf dem Feld mit der Wertigkeit 2 liegen jetzt also 366 Steinchen. Auch diese Repräsentation der Ausgangszahl ist korrekt: $366 \cdot 2 + 1 \cdot 1$. Jetzt fahren wir mit diesem Verfahren fort: Solange mehr als ein Steinchen auf einem Feld liegt, reduzieren wir die Anzahl, indem wir Steinchen paarweise entfernen und für jedes der Paare ein Steinchen in das Feld mit doppelter Wertigkeit legen. Im nächsten Schritt ergibt das $183 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$. Und so geht das immer weiter. Schließlich liegt auf jedem Feld höchstens ein Steinchen und wir haben die Binärdarstellung der Zahl gewonnen.

Addition mit dem binären Rechenbrett

Die beiden Felder des *Rechenbretts* dienen der Darstellung zweier Zahlen im Binärsystem. In jedem Feld befindet sich also höchstens ein Stein, beispielsweise eine Halmafigur. Stellen Sie die zwei zu addierenden Zahlen dar. Zur Addition werden die Steine in übereinander liegenden Feldern einfach im Feld der oberen Zeile, der Ergebniszeile, zusammengefasst.

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Jetzt müssen wir nur noch dafür sorgen, dass in jedem Feld der Ergebniszeile höchstens ein Stein liegt. Aber das funktioniert genauso wie bei der Zahlendarstellung: Liegen zwei Steine im Feld, legt man eins davon in das Feld links daneben – das ist der *Übertrag*. Das andere Steinchen kommt zum Steinchenvorrat. Das macht man solange, bis jedes Feld höchstens einen Stein enthält. Das Ergebnis ist gefunden.

Übungen

3 Zeigen Sie, dass im Binärsystem 1+1=10 gilt.

4 Stellen Sie die Zahlen 483 und 163 im Binärsystem dar und addieren Sie diese mit dem binären Rechenbrett.

5 Füllen Sie das nebenstehend Schema für die Addition zweier Zweibitzahlen aus.

+	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

Der einschrittige Übertrag

Additionen laufen im Computer ständig ab. Es kommt also darauf an, sie möglicht schnell durchzuführen. Und Konrad Zuse hat genau diesen Aspekt gründlich bedacht. Denn eins ist klar: Die schriftliche Addition, wie wir sie in der Schule gelernt haben, ist für den Computer zu langsam. Bevor man die Addition für eine beliebige Stelle durchführen kann, muss man wissen, ob es einen Übertrag von der vorhergehenden (rechts davon stehenden) Stelle gibt oder nicht. Die Rechnung läuft zwangsweise rein sequentiell ab, Stelle für Stelle, Schritt für Schritt, von rechts nach links. Und das ist für einen Automaten, der im Grunde ständig diese Additionen durchzuführen hat, zu zeitaufwendig. Am liebsten würde man den Rechner beauftragen, die Summe für alle Stellen gleichzeitig – also parallel – zu berechnen.

Konrad Zuse hat eine Lösung für den einschrittigen Übertrag gefunden. Dabei wird die Addition auch für große Zahlen in drei Schritten so durchgeführt, dass immer alle Stellen gleichzeitig behandelt werden können und dass der Übertrag in nur einem Schritt geschieht. Das kann man im Zehnersystem machen, aber auch im Binärsystem. Das Vorgehen wird am Beispiel der Addition der zwei Zahlen 39 und 42 erläutert, in binärer Darstellung: 100111 und 101010. Die Schritte:

I Wir addieren unabhängig voneinander für jede Stelle ohne Berücksichtigung der Überträge und erhalten die Zeile der *Summenbits*. Dabei merken wir uns zweierlei: Erstens, ob bei der stellenweisen Addition ein originärer Übertrag entsteht. Das ist immer dann der Fall, wenn die beiden zu addierenden Bits den Wert 1 haben. Und zweitens merken wir uns, wenn der

Wert 1 herausgekommen ist. In diesem Fall ist nämlich ein möglicher Übertrag von der vorhergehenden Stelle zu berücksichtigen, der dann sozusagen durchgekoppelt werden muss. Den *originären Übertrag* markieren wir mit einem liegenden Kreuz ×, die *Kopplung* mit einem Kreis o. Für unser Beispiel erhalten wir:

```
100111
101010
001101 (Summenbits)
× oo×o (Übertragsmarkierungen)
```

II Im zweiten Schritt wird nur die Zeile der Übertragsmarkierungen behandelt: Der Durchkopplungskreis wird zusätzlich mit einem Kreuz markiert, wenn rechts davon ein Kreuz steht (mit oder ohne Kreis). Die Kreuze (mit oder ohne Kreis) entsprechen nun jeweils den Überträgen auf die nächsthöhere Stelle. Nach dieser Regel wird aus der Markierungszeile × oo×o die Zeile × ⊗⊗×o. Die Berechnung der Überträge geschieht in einem Schritt, daher der Name *einschrittiger Übertrag*. Der einschrittige Übertrag lässt sich nicht in allen Rechnertechniken gleichermaßen gut verwirklichen: Mit Relais – der von Konrad Zuse ursprünglich ins Auge gefassten Technik – geht es am besten. An der mechanischen Realisierung, also am Zuse-Rechner Z1, lassen sich die prinzipiellen Schwierigkeiten beim Wechsel in eine andere Technologie sehr gut studieren.

III Im dritten Schritt ergibt sich das Ergebnis aus der stellenweisen Summe und den Überträgen: Wir ersetzen die Kreuze der Markierungszeile jeweils durch 1 und die leeren Stellen und Kreise jeweils durch 0. Die Markierungsszeile wird so zu 101110. Zur Vereinfachung der Addition verschieben wir die Zeile der Überträge um eine Stelle nach links und fügen rechts eine 0 an. So stehen jetzt die Überträge in der Spalte, wo sie zu berücksichtigen sind und nicht mehr dort, wo sie entstanden sind. Jetzt können wir stellenweise addieren und erhalten das Resultat der Addition.

```
 001101 (Summenbits)
1011100 (Überträge)
1010001 (Resultat)
```

Auch im Schritt III sind keine Überträge zu berücksichtigen, denn das haben wir schon im Schritt II erledigt. Die Summe hängt nicht davon ab, in welcher Reihenfolge man die Spalten behandelt. Die stellenweise Addition kann also wieder parallel ablaufen. Das Ergebnis ist die Zahl 81 in Binärdarstellung, wie es zu erwarten war.

Rechnen mit Binärwerten und Aussagenlogik

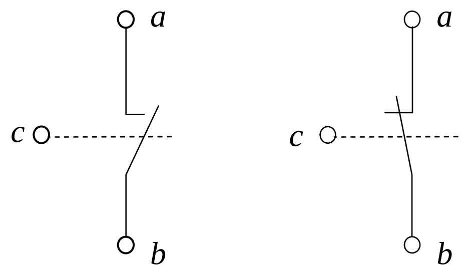
Die klassische Logik kennt nur die Wahrheitswerte FALSCH und WAHR. Die binäre Zahlendarstellung kommt mit den Werten 0 und 1 aus. Die Aussagenlogik ist ein ausgefeiltes System für die Umformung von Ausdrücken aus logischen Variablen und Wahrheitswerten.

Konrad Zuse ist auf den Zusammenhang zwischen der von ihm entwickelten „Bedingungskombinatorik" und der Aussagenlogik (auch: Schaltalgebra) früh aufmerksam geworden: Man musste nur 0 mit FALSCH und 1 mit WAHR übersetzen, schon ließ sich die Aussagenlogik für die Darstellung und Optimierung von Rechenoperationen wie der Addition nutzen.

Diese Erkenntnis begeisterte Konrad Zuse: „Noch während der Arbeit an den mechanischen Modellen nahm allmählich die Idee der elektronischen Rechenmaschine Gestalt an. Die Schaltalgebra kam uns zu Hilfe. Waren nicht schon die Gesetze gefunden, um rechnerische Schaltungen sowohl in der elektromagnetischen Relaistechnik als auch in der mechanischen Schaltgliedtechnik mit einem gemeinsamen Kalkül, dem Aussagenkalkül, darzustellen? Man brauchte also nur die Grundschaltungen in Röhrentechnik für die drei Grundoperationen Konjunktion, Disjunktion und Negation zu finden, dazu ein passendes Speicherelement und Mittel, um diese Elemente zusammenzuschalten. Die Aufgabe war klar: wir brauchten kein völlig neues Gerät in elektronischer Technik zu bauen, sondern den Entwurf nur in abstrakter Schaltgliedtechnik, das heißt formal mit symbolischen Elementen auszuführen.“ (aus den Lebenserinnerungen von Konrad Zuse, 1990, S. 36).

Relaisschaltungen

Für die Realisierung der Verknüpfung von Binärwerten kam für Zuse zunächst einmal die Relaistechnik in Frage.

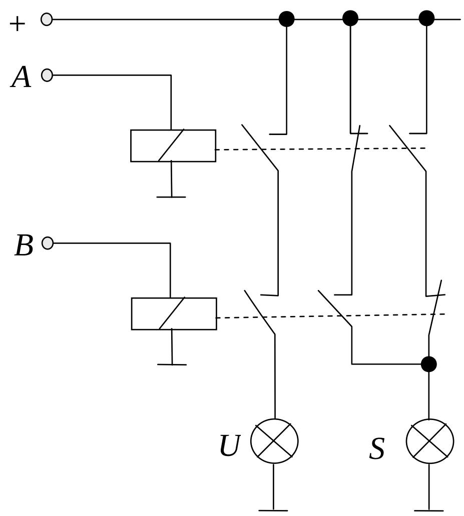


Wir stellen die binäre 1 durch eine positive Spannung dar und die binäre 0 durch die Spannung null. Die Spannungen werden gegen eine gemeinsame Erde mit dem Spannungswert null gemessen. Die kleinen Kreise sind die Punkte, an denen der Spannungswert gegenüber Erde gemessen wird. Für die Realisierung haben wir die beiden Relais-Typen *Schließer* (Arbeitskontakt-Relais) und *Öffner* (Ruhekontakt-Relais). Die gestrichelte Linie steht in diesen stark reduzierten Schaltbildern für eine an Erde angeschlossene Spule mit einem Anker, der bei anliegender Spannung den Relaiskontakt öffnet bzw. schließt.

Mit *a* und *c* bezeichnen wir die Eingangsgrößen: An den zugeordneten Kontakten wird eine positive Spannung angelegt oder die Spannung wird auf null gesetzt (Wert der entsprechenden Variablen gleich 1 bzw. gleich 0). Die Variable *b* sehen wir hier als Ausgangsgröße an – dort wird die Spannung gemessen. Der Schließer (links im Bild) realisiert die logische UND-Verknüpfung: *b* wird genau gleich 1, wenn *a*=1 und *c*=1 sind. Beim Öffner im rechten Bild wird die Variable *b* genau dann gleich 1, wenn *a*=1 und *c*=0.

Der Halbaddierer

Der Halbaddierer addiert die beiden auf einer Stelle übereinander stehenden Bits *A* und *B*. Das Summenbit ist *S* und der Übertrag wird mit *U* bezeichnet. Die Werte von *S* und *U* werden mit Lämpchen sichtbar gemacht. Das Pluszeichen (+) steht für die Versorgungsspannung. Die Funktionstabelle des Halbaddierers sieht so aus:



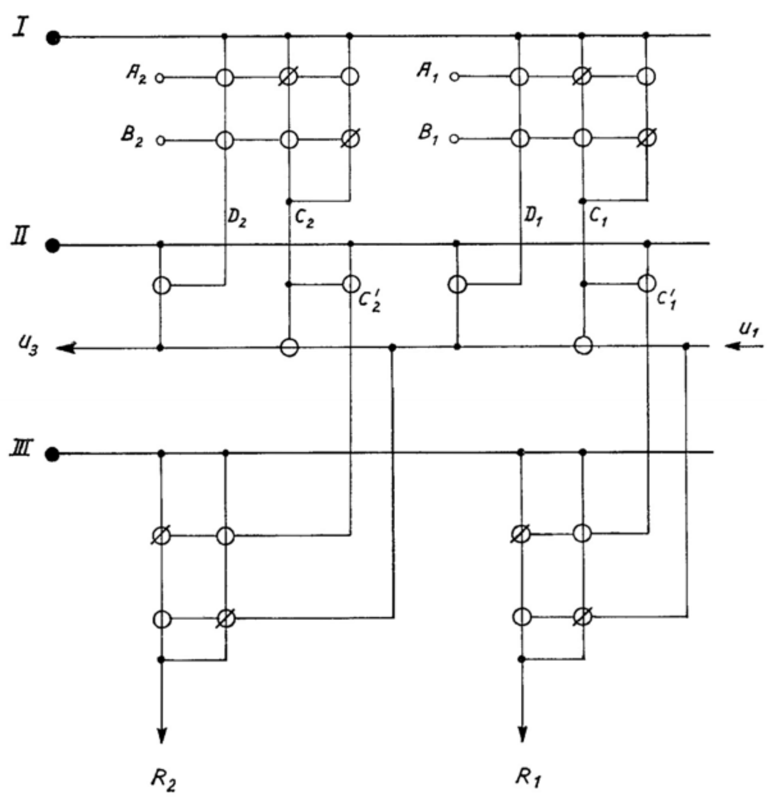
A	*B*	*U*	*S*
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Das Übertragsbit *U* wird durch eine logische UND-Verknüpfung (AND) und das Summenbit *S* durch eine EXKLUSIV-ODER-Schaltung (XOR) erzeugt.

Zuses Lösung der Addition mit einschrittigem Übertrag

Relaisschaltbild des Addierers

Das Relaisschaltbild zeigt den vollständigen Addierer für zwei zweistellige Dualzahlen in der von Konrad Zuse entwickelten Notation der *abstrakten Schaltgliedtechnik*. Die Relais sind als Kreise dargestellt. Der Öffner wird vom Schließer durch einen Schrägstrich unterschieden.



Zwischen den Leitungen für die Versorgungsspannungen *I* und *II* finden wir die zwei Halbaddierer für die Erzeugung der Summenbits (hier mit C_1 und C_2 bezeichnet) und die Bits für den erzwungenen Übertrag (hier D_1 und D_2).

Im ersten Schritt wird nur die Versorgungsspannung *I* eingeschaltet. Damit stehen neben den Summenbits C_1 und C_2 auch die originären Überträge D_1 und D_2 fest.

Im zweiten Schritt wird die Versorgungsspannung *II* zugeschaltet. Am Schaltbild können wir sehen, wie die Variablen D_1 und D_2 die originären Überträge auf die jeweils nächsthöhere Stelle erzwingen und wie über Relais die Durchkopplung der Überträge aufgrund der „Kopplungsmerker“ C_1 und C_2 wirksam wird. Die Überträge findet man auf den Leitungsabschnitten $U_3 \leftarrow U_1$.

Im dritten Schritt erfolgt durch Zuschaltung der Versorgungsspannung *III* nur noch die stellenweise Addition der Summenbits und der Übertragsbits mithilfe von XOR-Schaltungen.

Was hat es mit dem einschrittigen Übertrag auf sich?

Durch einen Drehschalter kann man nacheinander die Leitungen *I, II* und *III* unter Spannung setzen. Lässt man den Drehschalter auf der Stellung *III* stehen, dann sind alle drei Leitungen unter Spannung und das Modell funktioniert als reines Schaltnetz. Und das tut es einwandfrei. Wofür sind die anderen Schaltstufen da?

Die Minderung des Verschleißes und die damit verbundene Erhöhung der Zuverlässigkeit bilden den wahren Hintergrund für das Nacheinander der Schalthandlungen: Zuerst kommt das Anlegen der Spannungen für die Eingangssignale und erst dann werden nacheinander die Versorgungsspannungen der Leitungen *I, II* und *III* zugeschaltet. Dadurch werden alle Schaltkreise lastfrei geschaltet und es kommt nicht zur Funkenbildung und zu dem damit einhergehenden Verschleiß der Relaiskontakte. Die Ermittlung der Überträge für sämtliche Stellen der Zahlendarstellung kann tatsächlich in nur einem einzigen Schritt und quasi gleichzeitig erfolgen – durch Zuschaltung der Spannung auf Leitung *II*.