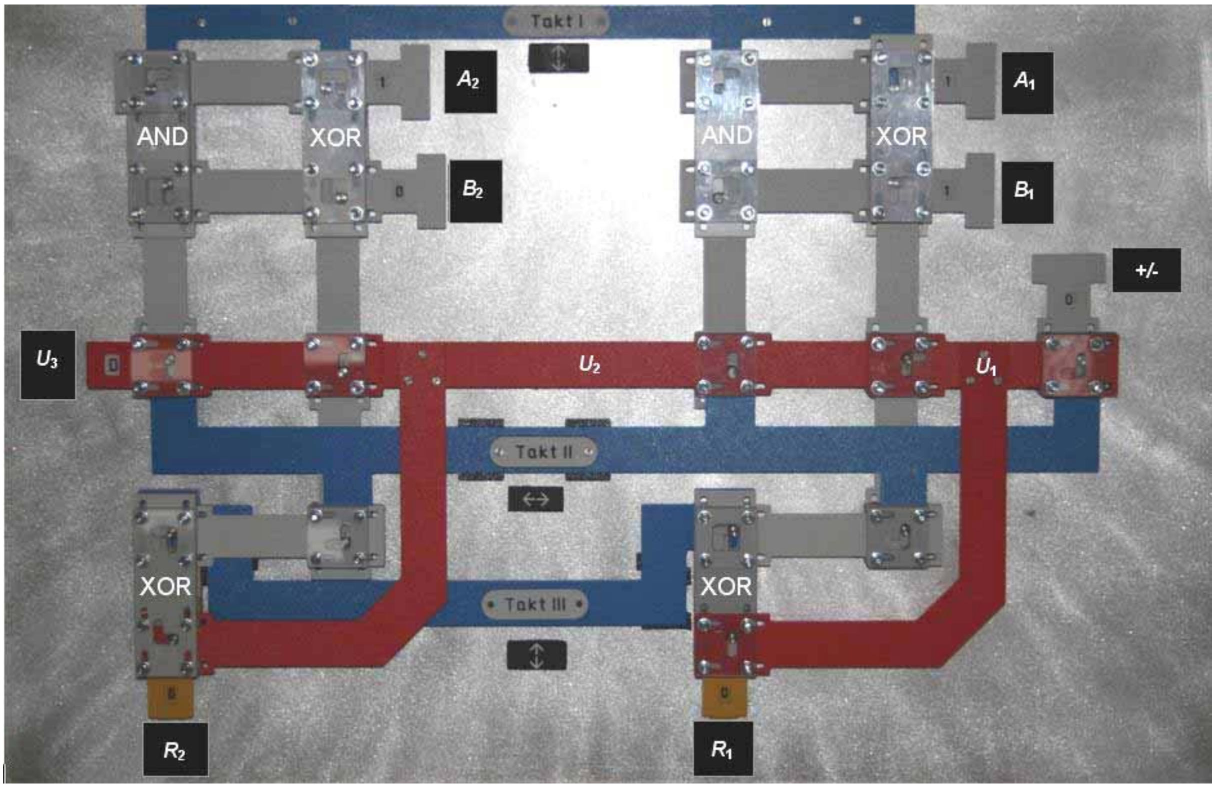
Das Z1-Addierermodell

Timm Grams, Fulda, 19. März 2012 (aktualisiert: 24.02.2013)

Das Modell



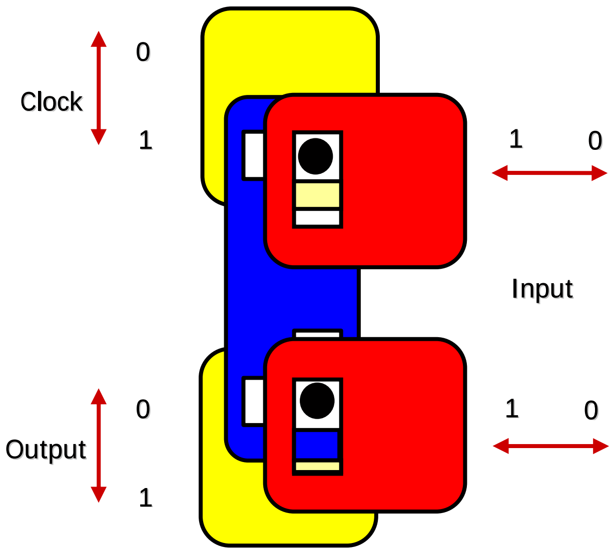
Wegen des zu erwartenden hohen Platzbedarfs eines Zahlenspeichers in Relaistechnik entwickelte Zuse für seinen ersten Rechner eine mechanische Schaltgliedtechnik. Die Z1 baute er vollständig mechanisch auf. Der Z1-Addierer ist im Wesentlichen eine Eins-zu-eins-Übertragung der Relaislösung in eine von ihm eigens entwickelte mechanische Rechentechnik.

Die Rechenvorgänge werden in dieser Technik durch das Verschieben schlichter Metallbleche realisiert, die auf trickreiche Weise über Schaltstifte miteinander verbunden sind. In den Modellen des Zuse-Museums sind diese „Bleche“ aus Kunststoff – teilweise durchsichtig und verschiedenfarbig. Das erleichtert das Erklären der Funktionsweise.

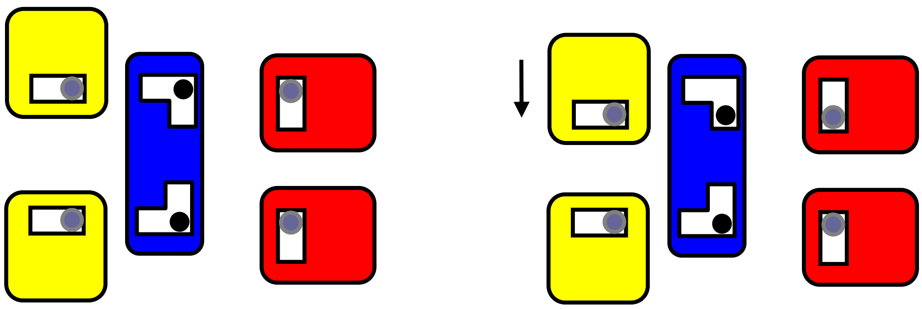
Das Foto des Modells zeigt die strukturelle Übereinstimmung mit der Relaislösung. Die Bezeichnungen der Größen halten sich an Zuses Darstellung des Addierers in abstrakter Schaltgliedtechnik. Wie beim Addierer in Relaistechnik geschieht auch beim Z1-Addierer die Addition in den Taktschritten I, II und III.

Die Schaltglieder AND und XOR

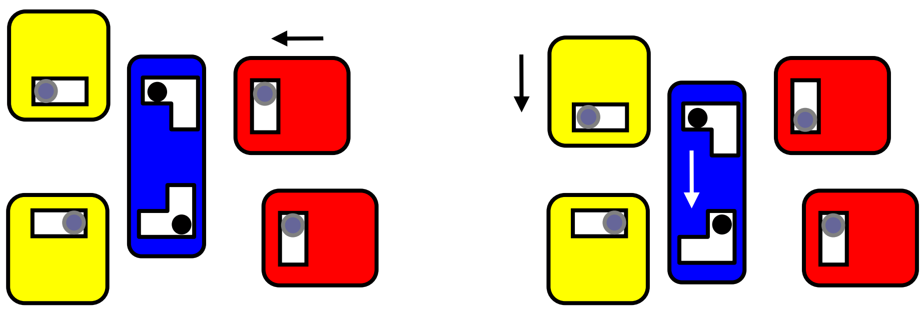
Die Skizze zeigt den prinzipiellen Aufbau eines AND-Schaltglieds (logisches Und): Gelb sind das Taktblech und das Blech der Ausgangsgröße. Die beiden Bleche für die Eingangsgrößen sind rot und blau ist das Kopplungsblech. Die schwarzen Kreise repräsentieren die Schaltstifte in Draufsicht.



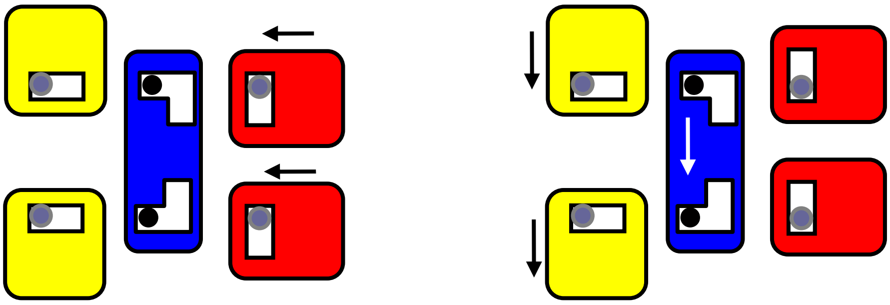
Die Ausfräsungen sind in den folgenden Explosionsbildern besser zu sehen. Im linken Bild sind Takt (Clock) und Eingangsgrößen (Input) jeweils in der Anfangsposition 0. Das rechte Bild zeigt das Ergebnis, wenn der Takt auf die 1-Position geschoben wird. Das Kopplungsblech und Ausgangsblech bewegen sich nicht.



Jetzt werden alle Bleche wieder zurück in die Ausgangslage gebracht. dann wird das Blech des oberen Eingangs nach links in die 1-Position geschoben. Es entsteht das linke der folgenden Bilder. Nach Betätigen des Takts (rechtes Bild) hat sich zwar das Kopplungsblech, nicht aber das Ausgangsblech bewegt.

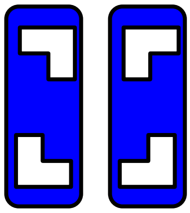


Erst wenn beide Eingänge auf die 1-Position gebracht werden, bewegt sich mit dem Takt auch das Ausgangsblech in die 1-Position. Das zeigen die folgenden Explosionsbilder.



Das AND-Schaltlied liefert also genau das gewünschte Ergebnis: Nur dann, wenn beide Eingänge gleich 1 sind, wird durch den Takt auch der Ausgang auf 1 gesetzt.

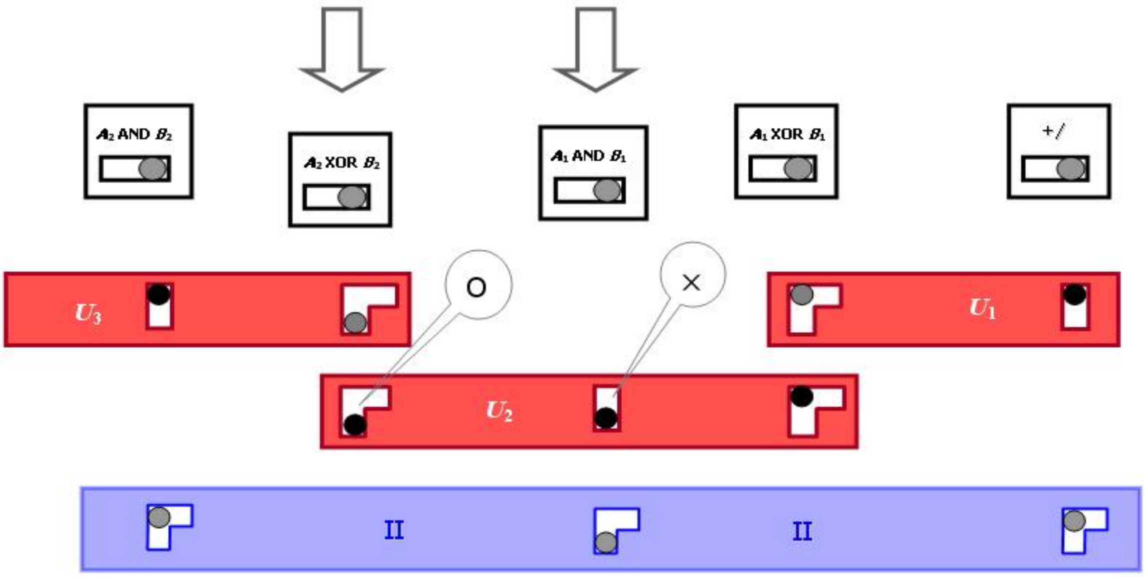
Für das XOR-Schaltglied (exklusives Oder) sind zwei Kopplungsbleche nötig. Alles andere kann bleiben wie beim AND-Schaltglied. Die Ausfräsungen der Kopplungsbleche sind im nebenstehenden Bild zu sehen.



Die Übertragskette

Mit dem oben abgebildeten mechanischen Addierermodell soll die Summe der Zahlen 3 und 1 ermittelt werden. Zuerst werden die Eingaben gesetzt: A_2=1, A_1=1 für die Zahl 3 und B_2=0, B_1=1 für die Zahl 1. Bewegen des Taktbleches I nach unten bewirkt mittels der AND- und XOR-Schaltglieder die stellenweise Addition und stellt die Informationen für den originären Übertrag und die Übertragskopplung bereit.

Das eingangs abgebildete Modell ist genau in diesem jetzt erreichten Zustand: Die Schieber der Eingänge A_2, A_1 und B_1 sind nach links geschoben, in Position 1. Entsprechend sind die diesen Eingängen zugeordneten Schaltstifte in den Verknüpfungsglieder in linker Position. Der Schieber des Eingangs B_2 ist herausgezogen und damit auf Position 0. Dementsprechend sind die zugeordneten Schaltstifte der Schaltglieder in rechter Position.



Takt I ist schon erfolgt. Der dadurch erreichte Zustand ist an den Positionen der Schaltstifte in den Verknüpfungsgliedern der Übertragsbleche U_1, U_2 und U_3 abzulesen. Das obige Bild zeigt – in einem grafisch vereinfachten Explosionsbild – die dadurch hergestellten Kopplungsbeziehungen zwischen den Übertragsblechen und dem Taktblech II.

In Kommentarblasen eingetragen sind die Hinweise auf den „Merker“ für den originären Übertrag, das liegende Kreuz ×, und den „Merker“ für die Kopplung, der Kreis.

Wegen A_1 AND $B_1 = 1$ ist der entsprechende Schaltstift nach unten gewandert und hat das Taktblech II mit Übertragsblech U_2 gekoppelt. Das ist der originäre Übertrag: Eine Bewegung des Taktbleches II nach links bewirkt, dass sich auch das Übertragsblech U_2 nach links bewegt und in die 1-Position übergeht.

Die Verkopplung der Übertragsbleche U_2 und U_3 ist wegen A_2 XOR $B_2 = 1$ gegeben. Dadurch wird mit Takt II auch das Übertragsblech U_3 nach links in die 1-Position bewegt. Damit ist der Übertrag auf die Stelle mit der Wertigkeit 4 gegeben (2^2).

Die Verschiebung des Taktblechs II bewirkt also eine gleichsinnige und gleichzeitige Verschiebung der Übertragsbleche U_2 und U_3. Das ist der einschrittige Übertrag!

Durch den Takt II werden auch die Eingänge der unteren Verknüpfungsglieder gesetzt, wie man auf dem Foto des Modells erkennen kann: Beim rechten XOR-Glied tut sich eingangsseitig nichts, da die stellenweise Addition den Wert 0 ergeben hat und der Übertrag von rechts (Übertragsblech U_1) ebenfalls gleich 0 ist.

Anders bei dem linken XOR-Glied: Sowohl die Addition als auch der Übertrag haben jeweils den Wert 1. Durch Takt II werden also die beiden Schaltstifte des XOR-Gliedes nach links verschoben.

Schließlich erhält man durch Bewegung der Taktbleche III nach unten die Ergebnisse. Da bei beiden Schaltgliedern die Eingänge äquivalent sind, bewirkt der Takt III keine Bewegung der Ausgangsbleche R_1 und R_2; sie verharren in der Position 0.

Damit haben wir das richtige Ergebnis: $U_3R_2R_1 = 100$ (dezimal: 4).

Das Modell ermöglicht auch die Subtraktion zweistelliger Zahlen: Der Subtrahend ist im Einerkomplement darzustellen und außerdem muss eine 1 addiert werden. Das geht mit einem Übertrag von rechts, der durch den mit dem Zeichen +/- markierten Schieber erzeugt werden kann.

Grenzen der mechanischen Lösung

Die mechanische Realisierung bringt vor allem drei Probleme mit sich: (1) Gehen die Eingänge horizontal in ein Schaltglied hinein, kommen die Ergebnisse vertikal gerichtet heraus und umgekehrt. Das sind lästige Randbedingungen für den Entwurf von Schaltnetzen und Schaltwerken. (2) Übertragsketten können sehr lang werden. Dann sind große Massen von nur einer Stelle aus zu bewegen: Eine „Lokomotive“ muss viele „Waggons“ ziehen. Das erfordert große Antriebs- und Federkräfte. (3) Die Verkopplung der Übertragsbleche ist mit Toleranzen behaftet. Bewegt die „Lokomotive“ den ersten und zweiten „Waggon“ noch leidlich gut, kann es am Ende einer Kette zu Bewegungen mit zu geringem Hub kommen: Die Schaltstifte rasten nicht mehr an der richtigen Stelle ein. Es kommt zu Verklemmungen und Verkantungen.

Bedienungshinweise für das Modell

Bei den Schiebevorgängen keine Gewalt anwenden!

Für jeden neuen Rechendurchgang müssen zunächst die Takte zurückgesetzt werden. Das muss zwingend in der umgekehrten Reihenfolge (III, II, I) geschehen.

Das Modell sollte horizontal aufliegen und nicht stehen.

Es ist darauf zu achten, dass bei jedem Schiebevorgang die Schaltstifte auch die richtige Position erreichen. Notfalls beim bewegenden Blech noch etwas nachhelfen.

Mit dem Addierer subtrahieren

Der Addierer ist das zentrale Bauteil eines Computers. Er ist ständig im Einsatz, denn die anderen Rechenoperationen lassen sich auf die Addition zurückführen: Subtraktion, Multiplikation, Division, Wurzelziehen usw. Deshalb hat Konrad Zuse, wie alle Computerarchitekten, auf die effiziente Realisierung des Addierers größten Wert gelegt.

Wie aber geht das: Subtrahieren mittels Addition? Die Idee dazu hatte bereits Blaise Pascal im Jahr 1642 umgesetzt: Auf seinen Zählrädern waren die Ziffern 0, 1, …, 9 nicht nur in aufsteigender, sondern auch in absteigender Folge nebeneinander markiert. Die nebeneinander stehenden Ziffern ergänzten sich auf neun; eine ist also das Neunerkomplement der anderen. Mit einem Abdeckblech konnte er die eine oder die andere der Ziffernreihen sichtbar machen bzw. abdecken.

Wenn wir einmal von vierstelligen Dezimalzahlen ausgehen, dann lässt sich die Subtraktion der Zahl 1642 von der Zahl von 1941 so bewerkstelligen: Bilde das Neunerkomplement des Subtrahenden und addiere 1. Aus 1642 wird so 8358. Dann addiere diese Zahl zum Minuenden. Das Resultat ist 10299. Da die führende Eins bei vierstelliger Darstellungsweise nicht zu sehen ist („Überlauf"), wird das korrekte Ergebnis angezeigt: 1941-1642 = 299.

Das Prinzip wird durch den folgenden Rechengang klar: 1941-1642 = 1941 + (10000-1642) – 10000 = 1941 + ((9999-1642) +1) – 10000 = 1941 + (8357 + 1) – 10000 = 1941 + 8358 – 10000 = 10299 – 10000 = 299.

Was bei diesem vierstelligen Dezimaladdierer die Zahl 10000 (zehntausend) ist, das ist in unserem Z1-Addierermodell mit seiner Zwei-Bit-Zahlendarstellung die Zahl 100 (vier); das ist die Zahl, die sich mit zwei Bits gerade nicht mehr darstellen lässt. Was vorher das Neunerkomplement war, ist hier das Einerkomplement. Das Einerkomplement einer Zahl y wird $\sim y$ geschrieben.

Wir wollen die Zweibitzahl y von der Zweibitzahl x subtrahieren und setzen $y \leq x$ voraus. Wir schreiben die Subtraktion der Zahlen ausführlich auf und folgen dabei demselben Pfad wie soeben beim Dezimalsystem: $x - y = x + (100 - y) - 100 = x + ((11 - y) + 1) - 100 = x + (\sim y + 1) - 100$. Da mit 100 nur der zu erwartende Überlauf subtrahiert wird, denn $100 + x - y$ ist nicht kleiner als 100, erscheint auf den niedrigen Stellen das korrekte Subtraktionsergebnis: $x - y = x + (\sim y + 1)$. Ein Hinweis für den Mathematiker: Er möge das Gleichheitszeichen als „äquivalent modulo 100 (vier)" lesen.

Die Subtraktion x-y kann man auch so schreiben: $x+(-y)$. Der Minusoperator „-" ist definiert durch $-y = \sim y + 1$. Und genau dieses $-y$ liegt im Falle der Subtraktion bereits am Addierer an. In den Zuse-Rechnern findet die Minusoperation in den Vorbereitungsschritten IV und V statt.

Das Z1-Addierermodell beinhaltet nicht die Vorbereitungsschritte zum Anlegen des negativen Wertes. Das muss der Bediener selbst tun: Bildung des Einerkomplements $\sim y$ der zu subtrahierenden Zahl y und Eingabe der 1 am mit „+/-" gekennzeichneten Eingang.

Subtrahieren wir beispielsweise die Zahl 10 (zwei) von der Zahl 11 (drei), dann legen wir am A-Eingang den Wert 11 an (A_2=1 und A_1=1) und am B-Eingang den Wert ~10 = 01 (B_2=0 und B_1=1). Außerdem müssen wir den „+/-"-Schieber auf 1 stellen. Nun steht dem Addierer der Subtrahend vorzeichengerecht zur Verfügung: –10 = ~10 + 1 = 01 + 1. Die Addition liefert das erwartete Ergebnis: x-y = 01 (R_2=0 und R_1=1) sowie den Übertrag (U_3 = 1), der unberücksichtigt bleibt.