

Praktikum der Physik

Einleitung

Aufgabe des physikalischen Praktikums ist es, dem Studierenden die Physik durch das Experiment näher zu bringen, ihn mit der Methode des Experimentierens vertraut zu machen und ihn zur Kritik der Methode zu erziehen. Da im Praktikum fast ausschließlich quantitative Versuche durchgeführt werden, ist die Frage nach der erreichten und erreichbaren Genauigkeit wichtig.

Wegen der organisatorisch bedingten Entkopplung des Praktikums vom Gang der Vorlesung ist es unumgänglich, daß sich die Teilnehmer vor jedem Versuch auch theoretisch vorbereiten. Dazu sollten sie neben den „Anweisungen“ auch andere Einführungen in die Physik verwenden. Während des Praktikums stehen den Teilnehmern die Assistenten des Praktikums für die Erteilung von Auskünften zur Verfügung.

Zur Durchführung der Versuche benötigt man ein Protokollheft, einen Taschenrechner, Bleistift, Lineal und normales Millimeterpapier. Nach Abschluß des Experiments soll innerhalb einer Woche ein Protokoll abgegeben werden. Es sollte enthalten: Name, Datum, Name des Assistenten, die Aufgabenstellung, Erläuterung der Methode, kurze Beschreibung der Versuchsanordnung mit Skizze, eine übersichtliche Zusammenstellung der Messungen, Endresultat mit einer Fehlerangabe und eine Diskussion. Das Wesentliche ist, eine Darstellung zu geben, die alles wichtige bringt, aber dabei so kurz wie möglich ist.

1. Messung und Genauigkeit

Man pflegt zu sagen: Eine Größe messen heißt eine Zahl (Maßzahl) bestimmen, die angibt, wieviel man eine konventionell festgelegte Einheit der gleichen Art in der bekannten Größe enthalten ist. Dieser Satz bedarf aber einer Ergänzung. Es gibt nämlich keine „genauen“ Instrumente und keine „exakten“ Methoden in der Physik, sondern Instrumente und Methoden erscheinen nur mitunter als exakt, wenn man sie so wenig kritisch betrachtet oder so geringe Genauigkeitsansprüche an sie stellt, daß ihre Fehler einem nicht auffallen. Daß heißt, eine Messung führt nicht zu einer ganz eindeutigen Maßzahl, sondern zur Angabe eines Bereiches, innerhalb dessen die Maßzahl liegt.

Nach dem jeweiligen Genauigkeitsanspruch richtet es sich, welche Methode zweckmäßigerweise zur Anwendung gebracht werden kann und wieviel Zeit zu ihrer Durchführung benötigt wird. Die Dichte einer Flüssigkeit z.B. auf 1% genau zu bestimmen, wird sich mit einem Meßzylinder und einer Briefwaage in etwa einer Minute ausführen lassen. Auf 0,1% wird man sie mit einer Mohrschen Waage in einer Viertelstunde bestimmen können. Eine Genauigkeit von 0,001 % wird man mit einem Pyknometer, einem Thermostaten und einer guten Waage bei einem Zeitaufwand von einigen Stunden erreichen. Eine noch 100-mal größere Genauigkeit zu erzielen, wird selbst bei Einsatz größter Mittel kaum durchführbar sein. Den Begriff „genau“ und „ungenau“ gibt es daher nicht in einem absoluten Sinne, sondern es gibt nur die Frage, was sich aus einem vorgegebenen Instrument und einer bestimmten Methode in einer vorgegebenen Zeit von einem bestimmten Experimentator an Genauigkeit herausholen läßt. Darüber soll der Student im Praktikum Erfahrungen sammeln, die er für die weitere Praxis braucht.

2. Bedeutung der Wiederholung von Messungen

Eine erste Begrenzung der Genauigkeit stellt die Ablesungsunsicherheit der benutzten Instrumente dar (Digitalinstrumente haben zwar keine Ablesungsunsicherheit, gleichwohl ist spätestens das letzte Digit, selbst abgesehen von tatsächlichen Schwankungen, unsicher). Wenn man eine Länge mit einem in Millimeter eingeteilten Maßstab bestimmt, so wird man die Bruchteile eines Millimeters nur der Schätzung nach ermitteln und daher angeben müssen, daß das Resultat um $\pm 0,1\text{mm}$ unsicher ist. Aber nur bei einfachen Längen- oder Gewichtsmessungen ist der Ablesungsfehler der einzige, der berücksichtigt werden muß. Meistens wird man feststellen, daß bei Wiederholung der Messung innerhalb einer Meßreihe Schwankungen auftreten, die größer sind als die Ablesungenauigkeit. Das Beobachten dieser Schwankungen ist bei allen Experimenten sehr wichtig, denn es führt dazu, gewisse Fehlerquellen als vermeidbar zu erkennen und andere unter gegebenen Verhältnissen als unvermeidbar anzusprechen. Hier unten wird beschrieben, wie man aus den unvermeidbaren Schwankungen die Meßgenauigkeit bestimmt. Das Wiederholen der Messungen unter möglichst gleichen oder kontrolliert in einer Hinsicht veränderten Bedingungen ist daher das Grundprinzip jedes experimentellen Arbeitens.

3. Standardabweichung der Einzelmessung und Standardabweichung des Mittelwerts

Betrachten wir eine Meßreihe, wobei die gleiche physikalische Größe x unter möglichst gleichen Bedingungen n -mal gemessen wird. Die gewonnenen n Meßwerte bezeichnen wir als $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Jetzt unterteilen wir den Bereich der n gemessenen Werte in eine Reihe von gleich großen Intervallen der Breite Δx und bestimmen die Anzahl $n(x)$ der auf jedes Intervall entfallenden Meßwerte.

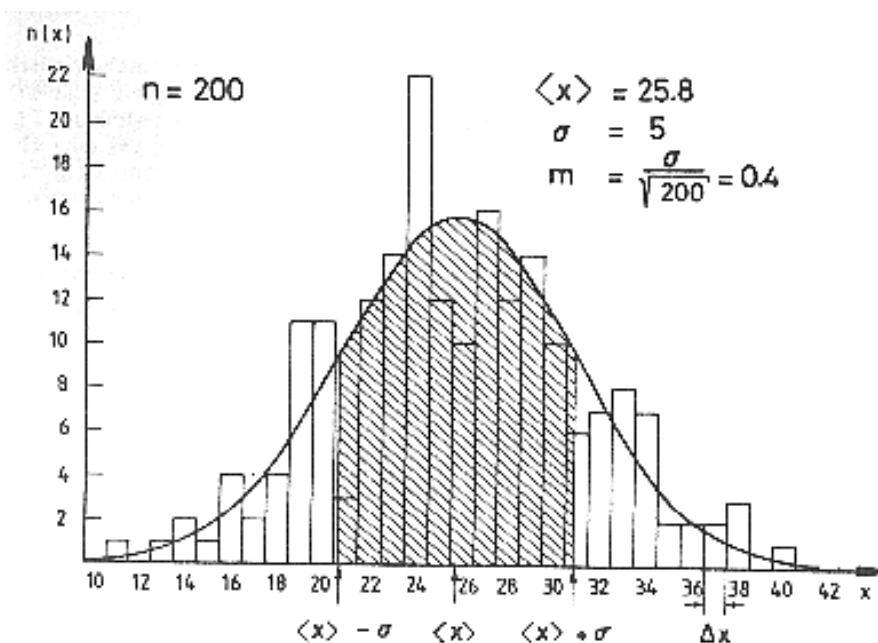
Diese Häufigkeitsverteilung kann in einem Balkendiagramm dargestellt werden, das Histogramm genannt wird. Figur 1 zeigt ein solches Beispiel, in dem insgesamt $n = \sum n(x) = 200$ Messungen der Variable x dargestellt sind. Die Intervallbreite ist $\Delta x = 1$. Man erkennt, daß die Meßwerte nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern sich anhäufen. Für die meisten kontinuierlich veränderlichen Meßwerte nimmt man an, daß die Verteilung für immer größere n und immer kleinere Intervallbreite Δx die Gauß- oder Normalverteilung anstrebt. Diese Verteilung wird auch Glockenkurve genannt und wird charakterisiert durch ihre Breite und ihren Schwerpunkt. Diese zwei Größen enthalten also die im Experiment vorhandene Information. Es ist leicht einzusehen, daß für eine symmetrische Verteilung der arithmetische Mittelwert

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

gleich dem Schwerpunkt ist. Ein vielbenutztes Maß für die Breite der Verteilung und damit die Genauigkeit der Einzelmessung ist die sogenannte Standardabweichung der Einzelmessung σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (2)$$

Für $n = 1$ ($n - 1 = 0$) ist σ undefiniert. Das bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß man für eine Fehlerabschätzung mindestens zwei Meßwerte braucht.



Figur 1: Histogramm und zugehörige Gaußkurve

Für die ideale Gaußverteilung ($n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0$) kann man beweisen, daß 68,3% der Fläche unterhalb der Kurve (und damit 68,3% der Meßwerte, schraffierter Bereich in Figur1) in dem Intervall zwischen $\langle x \rangle + \sigma$ und $\langle x \rangle - \sigma$ liegen.

Anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert in den Bereich von $\langle x \rangle + \sigma$ und $\langle x \rangle - \sigma$ fällt, beträgt 68,3%. Eine Eigenschaft von σ ist, daß seine Größe für steigendes n mit immer kleineren Schwankungen einen konstanten Wert anstrebt. Für endliches n ist also σ selbst mit einer Unsicherheit behaftet aber immer noch brauchbar als Indikator der Meßgenauigkeit. Als Faustregel kann man festhalten, daß für nicht zu kleine n ($n > 5$) zwei Drittel der Meßwerte zwischen $\langle x \rangle + \sigma$ und $\langle x \rangle - \sigma$ liegen und schon über 90% zwischen $\langle x \rangle + 2\sigma$ und $\langle x \rangle - 2\sigma$. Die Meßgenauigkeit der Einzelmessung wird theoretisch nicht besser durch Wiederholung. Glücklicherweise stimmt das nicht ganz; Experimentieren will gelernt sein.

Weiter ist aus Fig.1 einsichtig, daß der Fehler, mit dem der Mittelwert $\langle x \rangle$ behaftet ist, kleiner sein wird als der Fehler der Einzelmessung σ . Der Mittelwert wird nämlich auch für endliche n in oder nahe an dem Intervall der größten Häufigkeit (längste Balken des Histogramms) liegen. Mit Hilfe der später zu berechnenden Fehlerfortpflanzungsregeln kann man beweisen, daß die Standardabweichung des Mittelwerts, m , ist:

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Obwohl also die Genauigkeit der Einzelmessung σ mehr oder weniger konstant ist, kann man durch Wiederholung die Präzision des Meßresultats m verbessern. σ ist ein statistisches Maß

für die Qualität der jeweiligen Kombination Meßaufstellung-Experimentator, m für den Fleiß des Experimentators und für die erreichte Genauigkeit des Meßresultats.

Da m , der Fehler des Mittelwertes, proportional zu $1/\sqrt{n}$ ist, kann man durch Wiederholung der Messungen zunächst ziemlich rasch eine Steigerung der Genauigkeit erzielen, man kommt aber bald an eine Grenze der Nützlichkeit bei der bloßen Wiederholung. Für eine 3-fache Genauigkeit ist eine 9-fache Anzahl von Messungen erforderlich, für eine 10-fache Genauigkeit braucht man schon eine 100-fache Anzahl. Diese Methode zur Steigerung der Genauigkeit lohnt sich bei automatisierten Messungen, z.B. bei Zählrohrmessungen in der Kernphysik.

Es gibt aber eine ab und zu eintretende Situation, wo man die Genauigkeit auf einen Schlag um einen Faktor n anstatt eines Faktors $\sqrt{n}$ verbessern kann. Dies ist immer dann der Fall, wenn anstatt n mal der einzelnen Meßgröße x sofort die n -fache Meßgröße $n \cdot x$ gemessen werden kann. Der Mittelwert $\langle x \rangle$ ist dann $\langle x \rangle = n \cdot x / n$, aber der Fehler kann kleiner sein als die Standardabweichung des Mittelwertes, berechnet aus n Messungen von x .

Messen wir z.B. die Zeit, die ein Pendel für 10 Schwingungen braucht, anstatt 10-mal die Zeit einer einzelnen Schwingungsperiode T . Da man eine 10-fache Zeitdauer mit dem gleichen Absolutfehler wie eine 1-fache bestimmen kann, ist der Fehler in $\langle T \rangle = 10T / 10$ zehn mal kleiner als der Fehler in einer Einzelmessung von T . Zehn mal T zu messen ist mehr Aufwand, und der Fehler im Mittelwert wäre nur um ein Faktor $\sqrt{10} \cong 3$ kleiner.

Andere Fälle: Eichung eines Okularmikrometers. Man vergleicht unter dem Mikroskop zwei Skalen, eine bekannte und eine unbekannte. Vernünftiger Weise schätzt man nun *nicht* ab, mit wieviel Skalenteilen ein einzelnes unbekanntes Skalenteil übereinstimmt, sondern vergleicht möglichst weit auseinanderliegende Teilstriche. Bei Messungen im Kundt'schen Staubrohr mißt man nicht eine einzelne Wellenlänge sondern gleich mehrere.

Andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind die Binominalverteilung (für Kopf-oder-Zahl-ähnliche Prozesse), Lorentzverteilungen (bei Resonanzphänomenen) oder Poissonverteilungen (für Vorgänge mit sehr niedrigen Wahrscheinlichkeiten). Für alle kann man Abweichungen vom Mittelwert bestimmen, oft auch Linienbreiten genannt.

4. Systematische und statistische Fehler von Messungen

Nun liegt es auf der Hand, den gewonnenen Mittelwert $\langle x \rangle$ unserer gesuchten Meßgröße gleichzustellen. Dabei muß aber ein Haken betrachtet werden: Es gibt systematische und statistische Fehler.

Statistische Fehler sind Fehler die einen zu hohen Meßwert zur Folge haben, mal einen zu niedrigen, den Mittelwert aber nicht beeinflussen.

Systematische Fehler sind Fehler, die immer einen entweder zu großen oder zu kleinen Meßwert zur Folge haben und somit den Mittelwert verschieben.

Die oben errechneten σ und m beziehen sich nur auf statistische Fehler und enthalten keine Information über die systematischen Fehler. Ursachen für systematische Fehler sind z.B. schlechte Eichung einer Waage, falsch abgelesene Zeitbasiseinstellung eines Oszillographen, nicht konsistenter Einsatz von Einheiten, verlaufende Nulleinstellung, usw.

Daher sollte man zunächst immer etwas messen, was schon bekannt oder aus der Literatur zu erfahren ist. Mit einer Mohr'schen Waage bestimmt man z.B. zunächst die Dichte von normalem Wasser. Wenn das Resultat nicht ungefähr auf 1 g/cm^3 ist, sollte man sich auf die systematische Fehlersuche begeben. Ein Abbe-Refraktometer wird ebenfalls mit Hilfe einer Messung an destilliertem Wasser geeicht. Bei dem Gebrauch einer Pirani-Druckmeßröhre kann man diese durch Messung mit niedrigsten Druck und Atmosphärendruck kontrollieren und justieren. Wenn zu einem Meßverfahren einmal keine Eichgröße vorhanden ist, gibt die Anwendung verschiedener Meßmethoden auf die gleiche Meßgröße möglicherweise Aufschluß. Dies wird z.B. bei der Messung der Luftfeuchtigkeit (Versuch Hygrometrie) praktiziert.

Manchmal sind systematische Fehler theoretisch oder empirisch so gut zu erfassen, daß sie als Korrektur des Meßresultats in die Meßmethode inkorporiert werden können. Zum Beispiel läßt sich beim Versuch Pyrometrie (Temperaturmessung eines Körpers mit Hilfe des Planck'schen Strahlungsgesetzes) die falsch abgelesene Temperatur eines glühenden Palladiumblechs korrigieren, wenn man die Abweichung seines Verhaltens von dem eines idealen Schwarzen Strahlers mit in Betracht zieht.

Die Ursachen von statistischen Fehlern sind unabzählbar: Mangelhafte Reproduzierbarkeit wegen Lagerreibung, begrenzte Empfindlichkeit der Meßinstrumente (auch Augen und Ohren sind als Meßinstrumente einsetzbar), Schwankungen der Meßgröße selbst z.B. wegen ungewollter aber unvermeidbarer Temperaturschwankungen, usw. Manchmal sind die Grenzen der maximal erreichbaren Genauigkeit auch fundamentaler Art: Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops z.B. wird beschränkt durch die Wellenlänge der benutzten Wellen egal, ob es sich um ein optisches, akustisches oder Elektronenmikroskop handelt.

5. Notation von Fehlern; absolute und relative Fehler

Die einfachste Methode, den Unsicherheitsbereich einer Meßgröße anzugeben, ist, nur diejenigen Stellen von ihr anzugeben, die bis auf die letzte definitiv sicher sind. Anders ausgedrückt: Man schreibe nur die signifikanten Ziffern hin. So bedeutet eine Gewichtsangabe von 5.4 g, daß die erste Nachkommastelle schon unsicher ist. Hätte man eine bessere Waage benutzt, könnte man vielleicht 5.37 g hinschreiben.

Besser ist aber den Unsicherheitsbereich explizit anzugeben: $5.37 \pm 0.03 \text{ g}$. In diesem Praktikum wird diese Schreibweise bevorzugt, wobei als Unsicherheitsbereich die Standardabweichung des Mittelwerts angegeben wird.

Nehmen wir als Beispiel eine gemessene Länge l , für deren Mittelwert aus 17 Messungen sich $\langle L \rangle = 0.5682347 \text{ mm}$ ergibt mit einer Standardabweichung des Mittelwerts von $m = 0.0336874 \text{ mm}$.

Da der Fehler aufgrund der endlichen Anzahl der Messungen selbst eine erhebliche Unsicherheit besitzt, sollte man von ihm eine, höchstens zwei Ziffern angeben. Man darf also nicht alle Nachkommastellen, die ein Taschenrechner so locker ausgibt, anstandslos hinschreiben.

Für sehr kleine oder sehr große Zahlen empfiehlt es sich, die exponentielle Schreibweise zu wählen. So wird aus $m = 0.0336874 \text{ mm}$, $m = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ oder sogar $m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$, weil Fehler immer großzügig aufgerundet werden (Faustregel: Dezimalen über 2 schon nach oben runden). Dann kann man aufgrund dieses Fehlers die nicht-signifikanten Stellen des Meßresultats abschneiden und auf- bzw. abrunden. Das gibt ein $\langle L \rangle$ von 0.57 mm . Mit gleichem Exponent für Mittelwert und Fehler wird das Endresultat:

$$L = \langle L \rangle \pm m = (57 \pm 4) \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

Auch noch vertretbar wäre $L = (56.8 \pm 3.5) \cdot 10^{-2} \text{ mm}$, aber mehr Ziffern würden nur Genauigkeit vortäuschen, die nicht erreicht ist.

Bis jetzt haben wir Fehler so aufgeführt, daß Meßgröße und Fehler die gleiche Einheit haben. Man nennt das: *Absolutfehler*. Es gibt eine zweite Möglichkeit: Man kann den *relativen* Fehler, d.h. den Fehler als Bruchteil des Mittelwerts, angeben:

$$L = \langle L \rangle (1 \pm m / \langle L \rangle).$$

Der Fehler wird damit dimensionslos. Den relativen Fehler gibt man meistens in % an, also

$$L = \langle L \rangle \pm m / \langle L \rangle \cdot 100\%.$$

Für unser obiges Beispiel gibt das:

$$L = 57 \cdot 10^{-2} (1 \pm 4 / 57) \text{ mm} = 57 \cdot 10^{-2} (1 \pm 0.07) \text{ mm} \text{ oder } L = 57 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \pm 7\%.$$

Ansonsten gelten die gleichen Regeln: Nur signifikante Ziffern angeben (höchstens zwei für den Fehler), Fehler großzügig aufrunden, Mittelwert dem Fehler entsprechend abschneiden und auf- bzw. abrunden. Der Informationsgehalt der Versionen ist gleich, welche man für das Endresultat wählt ist Geschmackssache. Für die Fehlerfortpflanzung (siehe unten) braucht man oft sowohl Absolut- als auch Relativfehler der Zwischenresultate.

Als Endresultat der Messung einer Größe x gibt man also an: Mittelwert $\pm$ Standardabweichung des Mittelwerts, $\langle x \rangle \pm m$. Einheiten nicht vergessen! Fehler wahlweise als relative Fehler: $\langle x \rangle \pm m / \langle x \rangle \cdot 100\%$. Als Maß für die Genauigkeit gibt man die Standardabweichung der Einzelmessung, σ , an.

6. Fehlerfortpflanzung

Physik wird erst interessant, wo sie Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen aufklärt. Deshalb tauchen bei allen Versuchen zusammengesetzte Größen auf, die natürlich einen zusammengesetzten Fehler haben. Diesen Fehler zu finden ist Ziel der Fehlerfortpflanzungsregeln. Dieses Ziel besteht aus zwei Schritten: Wir müssen herausfinden, wie ein Fehler einer einzelnen Meßgröße sich als Fehler im Endresultat manifestiert, und

zweitens müssen wir berechnen, wie diese Einzelfehler sich zum Gesamtfehler des Endresultats zusammensetzen.

Dazu fassen wir das Endresultat als eine Funktion auf, die von mehreren Variablen, d.h. von den Einzelmeßgrößen abhängt. Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir beschreiben, wie sich der Wert der Funktion ändert, wenn kleine Änderungen (Fehler) der Variablen vorliegen.

f sei eine Funktion mehrerer Variablen $a, b, \dots$: $f = f(a, b, \dots)$. Eine Änderung von f als Folge kleiner Änderungen einer Variablen können wir ausdrücken durch partielle Differentiation:

$$\Delta^a f = f(a + \Delta a, b, \dots) - f(a, b, \dots) = \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \quad (4)$$

Hier ist Δa die Änderung der Variablen a , $\Delta^a f$ ist die Änderung in f als Folge der Änderung in a . Analog für Variable b , usw. Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt, weil wir nur kleine Änderungen der Variablen (Fehler) betrachten wollen. Die Rolle der Δ 's übernehmen nachher unsere σ 's und m 's.

Wenn man sich in dieser Weise Kenntnis über die einzelnen Fehlereinflüsse $\Delta^a f, \Delta^b f, \dots$ verschafft hat, ergibt sich die Frage nach ihrem Zusammenwirken. Sicheres läßt sich darüber nicht sagen, weil man nicht weiß, ob sie im Einzelfalle positiv oder negativ sind. Man erhält den „Fehler im ungünstigsten Falle“, wenn man alle Fehlereinflüsse mit positivem Vorzeichen annimmt und addiert. Er ist also:

$$\Delta f = |\Delta^a f| + |\Delta^b f| + \dots$$

Sind aber die Meßgrößen $a, b, \dots$ voneinander unabhängig (das wird meistens der Fall sein), dann können Fehler sich, statistisch gesehen, gegenseitig teilweise aufheben. In diesem Fall, d.h. wenn die Messungen der einzelnen Variablen einander nicht beeinflussen, wendet man das „Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz“ an, das einen kleineren Wert gibt als der „Fehler im ungünstigsten Falle“. Es lautet:

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta^a f)^2 + (\Delta^b f)^2 + \dots} \quad (5)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man sehen, wie stark die Einzelfehler den Fehler des Endresultats beeinflussen und welchen der einzelnen Messungen man besondere Sorgfalt beipflichten muß.

Ein Beispiel sei die Bestimmung der Dichte: Die Dichte ρ ist definiert als Quotient von Masse M und Volumen V , $\rho = M/V$. Die Masse eines Körpers sei $(350 \pm 1)g$, d.h. der relative Fehler ist $(1/350) \cdot 100\% = 0.3\%$. Das Volumen sei $55cm^3 \pm 1\%$. Da die Messungen von Masse und Volumen voneinander unabhängig sind, wenden wir das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz an. (Im nächsten Abschnitt wird erläutert, warum in diesem Falle relative Fehler eingesetzt werden und nicht Absolutfehler). Der relative Fehler in ρ wird

$$m_\rho / \rho = \sqrt{1^2 + 0.3^2} \% = \sqrt{1.09} \% = 1.005 \%$$

Im Rahmen unserer Rundungsfehler sind das 1.1%. Das heißt, der Fehler in ρ wird fast völlig durch den Fehler im Volumen bestimmt. Es hat also überhaupt keinen Sinn, eine genauere Waage zu benutzen, wenn nicht gleichzeitig die Volumenmessung entsprechend verbessert wird.

Jetzt können wir auch angeben, wann wir eine Größe als Variable oder als Konstante betrachten wollen:

Eine Größe können wir als Konstante behandeln, wenn ihre Ungenauigkeit so klein ist, daß sie auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes völlig vernachlässigbar gegenüber Fehlern in den anderen auftretenden Größen ist.

Nehmen wir als Beispiel die Bestimmung der Oberflächenspannung von Wasser aus der Steighöhe in eine Kapillare: Die Oberflächenspannung γ ergibt sich aus $\gamma = 1/4 \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot d \text{ N/m}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist, ρ die Dichte des Wassers, h die Steighöhe in der Kapillare und d die lichte Weite der Kapillare. Die Erdbeschleunigung g wird schon seit Jahrhunderten immer genauer gemessen und hat auf unserer geographischen Breite auf Meereshöhe einen Wert von $g = 9,80629 \text{ m/s}^2$ mit einer Genauigkeit von 1ppm (parts per million, also 10^{-6}). Da wir Steighöhe h und lichte Weite d ebenfalls auf 1% genau bestimmen können, ist der Fehler in g für uns völlig vernachlässigbar. Wir können g also als Konstante betrachten mit dem üblichen Näherungswert $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Das Gleiche gilt in diesem Falle für die Dichte des Wassers, $\rho = 1.00 \text{ g/cm}^3$. Es gibt natürlich auch wirkliche Konstanten wie die Zahlen π und e . Auch diese kann man in der Praxis meistens abrunden auf zwei Dezimalen, $\pi \cong 3.14$ und $e \cong 2.72$.

7. Praktische Spezialfälle

In diesem Abschnitt beschreiben wir zwei Spezialfälle, die zusammen mit der nachher zu besprechenden Linearen Regression für dieses Praktikum ausreichen. Als ersten Spezialfall betrachten wir eine Funktion f , die wir schreiben können als Summe von unabhängigen Variablen a, b , jeweils multipliziert mit einer Konstanten k_a, k_b :

$$f(a, b, \dots) = k_a + k_b \dots \quad (6)$$

Es liegen jeweils $n_a, n_b, \dots$ Messungen von $a, b, \dots$ vor, mit Fehlern $\sigma_a, \sigma_b, \dots$ und $\frac{\partial f}{\partial a} = k_a, \frac{\partial f}{\partial b} = k_b, \dots$. Nach Formel 4 wird der Fehler in f als Folge des Fehlers in a :

$$\Delta_a f = k_a \Delta a; \text{ analog für } b: \Delta_b f = k_b \Delta b \quad (7)$$

Auf diesen Fehler wenden wir das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz an. Das ergibt die Regeln Ia, b:

REGEL Ia

Der Absolutfehler in $f = k_a a + k_b b + \dots$ als Folge des Fehlers einer einzelnen Variablen, ist

für die Standardabweichung der Einzelmessung σ : $\sigma_f^a = k_a \sigma_a$, $\sigma_f^b = k_b \sigma_b$, ... (8a)

für die Standardabweichung des Mittelwerts m : $m_f^a = k_a m_a$, usw. (8b)

mit $m_a = \sigma_a / \sqrt{n_a}$, usw. .

REGEL Ib

Die Gesamtfehler in $f = k_a a + k_b b + \dots$ werden:

$$\sigma_f = \sqrt{(k_a \sigma_a)^2 + (k_b \sigma_b)^2 + \dots} \quad \text{und} \quad m_f = \sqrt{(k_a m_a)^2 + (k_b m_b)^2 + \dots} \quad (9)$$

Als zweiten Spezialfall betrachten wir Funktionen f , die von der Gestalt

$$f(a, b, \dots) = k \cdot a^p \cdot b^q \dots \quad (10)$$

sind. Hier ist k wieder eine Konstante, und die Exponenten $p, q, \dots$ sind beliebige positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen. Dann wird nach der Formel 4:

$$\Delta^a f = k(p \cdot a^{p-1} \cdot b^q \dots) \Delta a; \quad \Delta^b f = k(a^p \cdot q b^{q-1} \dots) \Delta b, \text{ usw.} \quad (11)$$

Das wird übersichtlicher, wenn man es als relative Änderung schreibt. Beide Seiten durch $f = k a^p \cdot b^q \dots$ geteilt liefert nämlich:

$$\frac{\Delta^a f}{f} = p \frac{\Delta a}{a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta^b f}{f} = q \frac{\Delta b}{b} \quad \text{usw.} \quad (12)$$

Um die Gesamtfehler zu bekommen, wendet man das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz auf die relativen Fehler an. So ergibt sich Regel II:

Regel IIa

Der relative Fehler $f = k \cdot a^p \cdot b^q \dots$ als Folge eines Fehlers in einer Variable ist

für die relative Standardabweichung der Einzelmessung σ :

$$\frac{\sigma_f^a}{f} = p \frac{\sigma_a}{a}; \quad \frac{\sigma_f^b}{f} = q \frac{\sigma_b}{b}; \dots \quad (13a)$$

für die relative Standardabweichung des Mittelwerts m :

$$\frac{m_f^a}{f} = p \frac{m_a}{a}; \quad \frac{m_f^b}{f} = q \frac{m_b}{b}; \dots \quad (13b)$$

Regel IIb

Die relativen Gesamtfehler in $f = k \cdot a^p \cdot b^q \dots$ werden damit:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(p \cdot \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(q \cdot \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \dots} \quad \text{und} \quad \frac{m_f}{f} = \sqrt{\left(p \cdot \frac{m_a}{a}\right)^2 + \left(q \cdot \frac{m_b}{b}\right)^2 + \dots} \quad (14)$$

Natürlich müssen direkte Abschätzungen zum gleichen Resultat führen wie diese Regeln. Z.B. ist der Fehler in der Fläche eines Kreises πr^2 bei bekanntem Fehler σ_r im Radius r :

$$\pi r^2 = \pi(\langle r \rangle \pm \sigma_r)^2 = \pi(\langle r \rangle^2 \pm 2 \cdot \langle r \rangle \sigma_r + \sigma_r^2) = \pi \cdot \langle r \rangle^2 (1 \pm 2 \cdot \sigma_r / \langle r \rangle + (\sigma_r / \langle r \rangle)^2).$$

Da der relative Fehler $\sigma_r / \langle r \rangle$ meistens klein ist im Vergleich zu 1, können wir $(\sigma_r / \langle r \rangle)^2$ vernachlässigen gegenüber $2 \cdot \sigma_r / \langle r \rangle$.

Resultat: Der relative Fehler in πr^2 ist zweimal der relative Fehler in r . Regel IIa mit $f = k a^p$, $k = \pi$, $a = r$ und $p = 2$ gibt das gleiche Ergebnis.

Mit Zahlen: Man bestimmt den Radius r eines Kreises, $r = 23 \pm 0.2 \text{ cm}$. Der relative Fehler in r ist dann $0.2 / 23 \cdot 100\% \cong 1\%$. Die Fläche ist

$$\pi(23)^2 \text{ cm}^2 \pm 2\% = 1660 \text{ cm}^2 \pm 2\%.$$

Zurückgerechnet auf den Absolutfehler ergibt das

$$1660 \text{ cm}^2 \pm 2 / 100 \cdot 1660 \text{ cm}^2, \text{ oder } 1660 \text{ cm}^2 \pm 34 \text{ cm}^2.$$

Das Vernachlässigen von $(\sigma_r / \langle r \rangle)^2$ ist völlig berechtigt:

wenn $\sigma_r / \langle r \rangle = 0.01 \text{ (1\%)}$, dann ist $(\sigma_r / \langle r \rangle)^2 = 0.0001 \text{ (0.01\%)}$.

Beachte das Weglassen der nicht-signifikanten Ziffern !

Ein anderes Beispiel: Der Fehler in $1 / \lambda = \lambda^{-1}$, wenn der Fehler im Mittelwert m_λ bekannt und $m_\lambda / \langle \lambda \rangle \ll 1$ ist, wird:

$$1 / \lambda = 1 / (\langle \lambda \rangle \pm m_\lambda) = 1 / (\langle \lambda \rangle (1 \pm m_\lambda / \langle \lambda \rangle)) \cong 1 / \langle \lambda \rangle \cdot (1 \mp m_\lambda / \langle \lambda \rangle).$$

(Die letzte Umformung beruht auf dem mathematischen Trick, daß $1 / (1 + x) \cong 1 - x$, wenn $|x| \ll 1$.)

In Worten: Der relative Fehler in einem Wert ist gleich dem relativen Fehler des Kehrwerts. Anwendung von Regel IIa mit $f = a^p$, $a = \lambda$ und $p = -1$ gibt das gleiche Resultat.

Mit Zahlen: Kennt man die Wellenlänge λ auf 3% genau, weiß man den Kehrwert $1 / \lambda$ auch auf 3% genau. Dann ist auch der relative Fehler in $2\pi / \lambda$ gleich 3%.

Manchmal braucht man sowohl Regel I als auch Regel II zur Berechnung des Fehlers im Endresultat. Für die Bestimmung der spezifischen Wärme C eines festen Körpers mit einem Wasserkalorimeter z.B. gilt die Formel

$$C = 4.2 \cdot \frac{M (T - T_m)}{m (T_M - T)} J / gK .$$

Dabei ist m die Masse des Körpers, M die Masse des Wassers, T_m die Anfangstemperatur des Körpers, T_M die Anfangstemperatur des Wassers und T die Mischungstemperatur, die sich einstellt, wenn man den Körper in das Kalorimeterwasser eingetaucht hat. Aus Messungen und Fehlern von T , T_m und T_M bestimmt man mit Hilfe von Regel I die Absolutfehler in den Temperaturkoeffizienten $(T - T_m)$ und $(T_M - T)$. Diese Fehler rechnet man anschließend um in relative Fehler und bestimmt dann den Gesamtfehler in C unter Anwendung von Regel II.

8. Lineare Regression

Bis jetzt sind wir davon ausgegangen, daß man die Bedingungen, unter denen man den Versuch durchführt, möglichst konstant hält. Anders gesagt, man bestimmt das Endergebnis für möglichst gleiche Werte der Variablen (z.B. 5 Messungen der Brechungsindices von Wasser bei 33°C) und behandelt Abweichungen als Fehler, wie oben beschrieben.

Nun ist es aber oft interessant, funktionale Zusammenhänge zwischen Endergebnis und einzelnen Meßvariablen zu untersuchen. Meistens handelt es sich dabei um theoretische Vorhersagen, es kann aber auch darum gehen festzustellen, ob das Endergebnis überhaupt von der jeweiligen Variablen abhängig ist (ist z.B. der Brechungsindex von Wasser temperaturabhängig?) Um Abhängigkeiten eindeutig zuordnen zu können, ändert man zunächst nur eine Variable, die übrigen hält man nach wie vor möglichst konstant. Sehr schön kann man zeitliche Abläufe erfassen, indem man die Zeit als Variable nimmt. Der funktionale Zusammenhang kann im Allgemeinen beliebiger Form sein. Da aber sowohl vom Auge als auch rein rechnerisch, gerade Linien am besten zu erfassen sind, versucht man die Daten so umzuformen, daß sich ein linearer Zusammenhang ergibt. Ein linearer Zusammenhang zwischen einer Variable x und Meßgröße $y(x)$ kann man schreiben als:

$$y(x) = \alpha \cdot x + \beta ,$$

wobei α die Steigung ist und β der y -Achsenabschnitt.

Nehmen wir z.B. die Luminiszenz eines Rubins. Nach Bestrahlung mit weißem Licht leuchtet ein Rubin rot nach. Die Intensität dieses roten Lichts klingt ab wie

$$I(t) = I(0) \cdot e^{-\kappa t} .$$

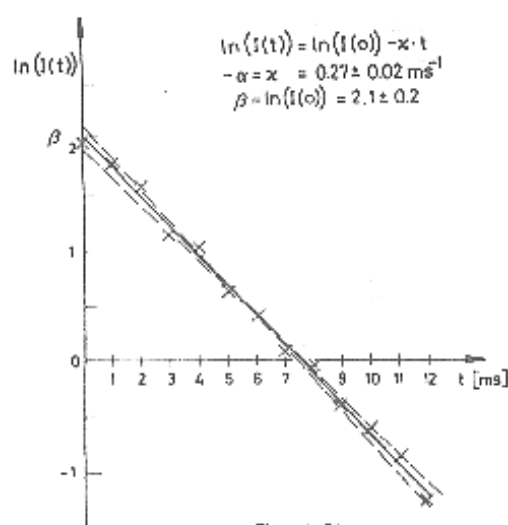
Dabei ist t die Zeit, die vergangen ist seit dem Ende der Bestrahlung mit weißem Licht und κ ist eine Konstante, die charakteristisch ist für den Rubin. Logarithmiert man beide Seiten, so ist das Resultat

$$\ln(I(t)) = \ln(I(0)) - \kappa \cdot t.$$

Tragen wir $\ln(I(t))$ (y-Werte) auf gegen die Zeit t (x-Werte) für verschiedene Zeitpunkte, sollten die Meßpunkte auf einer Geraden liegen mit der Steigung $\alpha = -\kappa$ und als y-Achsenabschnitt $\beta = \ln(I(0))$ (Fig.2). Die beste Gerade ist meistens von Auge mit Hilfe eines Lineals sehr gut zu erfassen. Wirkliche Ausreißer sind optisch leicht zu erkennen, und können außer Acht gelassen werden. Auch eventuelle Abweichungen von einem linearen Verhalten sind in einer Graphik sehr gut zu sehen.

Fehlerabschätzungen für Steigung und Achsenabschnitt erhält man dadurch, daß man außer der besten Gerade, die Geraden mit maximaler und minimaler noch mit den Daten verträglicher Steigung einzeichnet.

Bei der rechnerischen Variante der Linearen Regression werden mit Hilfe der Methode der Kleinsten Quadrate ein α und β errechnet, die die Summe der Abstände der gemessenen Wertepaare (x_i, y_i) zur Regressionsgeraden $y = \alpha \cdot x + \beta$ minimalisieren. Geeignete Taschenrechner oder Rechenprogramme erzeugen nach Eingabe der (x_i, y_i) -Paare α , β und ihre Fehler als Standardabweichungen σ_α respektive σ_β . Die Formeln sind am Ende dieses Kapitels aufgelistet. Die Vorteile der graphischen Methode sind jedoch so groß, daß man die rechnerische Methode i. d. Regel als Ergänzung und Kontrolle einsetzen sollte, nicht aber als Ersatz.



9. Formelsammlung für Fehlerrechnung

1. Direkte Messung:

Es liegen n Einzelmessungen x_i vor.

Arithmetischer Mittelwert:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardabweichung der Einzelmessung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Standardabweichung des Mittelwerts:

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Relative Fehler:

$$\frac{\sigma}{\langle x \rangle} \quad \text{und} \quad \frac{m}{\langle x \rangle}$$

2. Indirekte Messung:

$f = f(a, b, \dots)$; es liegen $n_a, n_b, \dots$ Einzelmessungen der Variablen $a, b, \dots$ mit den Fehlern $\sigma_a, \sigma_b, \dots$; $m_a = \sigma_a / \sqrt{n_a}$, $m_b = \sigma_b / \sqrt{n_b}$, ... vor:

Arithmetischer Mittelwert:

$$\langle f \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots)$$

Allgemeiner Fall:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \sigma_b\right)^2 + \dots}$$

$$m_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} m_b\right)^2 + \dots}$$

Spezialfall I:

Wenn $f = k_a a + k_b b + \dots$

$$\sigma_f = \sqrt{(k_a \sigma_a)^2 + (k_b \sigma_b)^2 + \dots}$$

$$m_f = \sqrt{(k_a m_a)^2 + (k_b m_b)^2 + \dots}$$

Spezialfall II:

Wenn $f = k \cdot a^p \cdot b^q \dots$

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(p \cdot \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(q \cdot \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \dots}$$

$$\frac{m_f}{f} = \sqrt{\left(p \cdot \frac{m_a}{a}\right)^2 + \left(q \cdot \frac{m_b}{b}\right)^2 + \dots}$$

3. Lineare Regression:

Es liegen n Wertepaare (x_i, y_i) vor. Die Ausgleichsgerade sei $y(x) = \alpha x + \beta$. Summiert wird von 1 bis n .

$$\alpha = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

$$\beta = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

Maß für die Streuung der y_i -Werte

um die Ausgleichsgerade:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (\alpha x_i + \beta - y_i)^2}{n - 2}}$$

Standardabweichung der Steigung:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Standardabweichung des y-Achsenabschnitts:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$