Gekoppelte Schwingungen

Diese Aufgabe gehört zu einer Gruppe von Versuchen, die neben einer Meßmethode vor allem mit einer typischen Grunderscheinung der Physik vertraut machen soll. Gekoppelte Schwingungen spielen eine große Rolle in der Elektronik, der Molekül- und Festkörperphysik; in Analogie spricht man von Kopplung bei Wechselwirkung der Elementarteilchen, der Nukleonen, der Atomelektronen usw.. Zweck der vorliegenden Aufgabe ist es nun an dem einfachen mechanischen System zweier gekoppelter Pendel die physikalischen Zusammenhänge der Koppelschwingungen durch quantitative Messungen zu verdeutlichen.

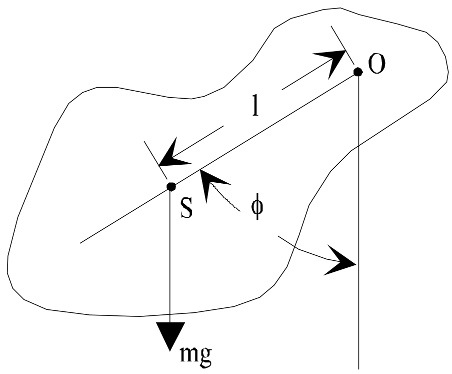
Vorausgesetzt werden dazu generelle Kenntnisse über Lineare Schwingungen und Drehbewegungen, die dazugehörigen Differentialgleichungen und Lösungen.

Definitionen

Ein *physikalisches Pendel* ist ein an einer waagrechten Achse aufgehängter starrer Körper beliebiger Form und Massenverteilung mit Schwerpunkt in S, der unter dem Einfluß der Schwerkraft Schwingungen um die Ruhelage (ϕ=0) ausführt.

Ein *mathematisches Pendel* ist ein idealisiertes physikalisches Pendel, bei dem sich die gesamte Masse im Schwerpunkt befindet, die Verbindungsstange OS also als massenlos gedacht ist.

Zwei Pendel heißen *gekoppelt*, wenn sie elastisch so miteinander verbunden sind, daß die Aus-lenkung eines Pendels auch Kräfte auf das andere bewirkt, also beide nicht mehr unabhängig von-einander schwingen.



Physikalische Grundlagen

1. Einzelpendel:

Es handelt sich bei der Schwingung des Pendels um eine Drehbewegung, deren Bewegungsgleichung somit durch

$$M = I\ddot{\phi}$$

gegeben ist. Sie wird für das physikalische Pendel mit

$$M = -mgl \sin\phi$$

bei Vernachlässigung der Reibung zu:

$$I\ddot{\phi} + mgl \sin\phi = 0 .$$

Für kleine Winkel darf sin (ϕ) $\cong$ ϕ gesetzt werden. Es heißt dann also

$$I\ddot{\phi} + D^{*}\phi = 0$$

mit dem Direktionsmoment:

$$D^{*} = mgl .$$

Hier ist das Trägheitsmoment bezogen auf die Achse O; es ergibt sich aus dem Trägheitsmoment I_S bezogen auf eine zu O parallele, durch den Schwerpunkt S gehende Achse aus dem Steinerschen Satz:

$$I = I_S + ml^2$$

Die Lösung lautet demnach

$$\phi = A\cos(\omega t + \alpha)$$

mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D^*}{I}} \text{ oder } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D^*}}.$$

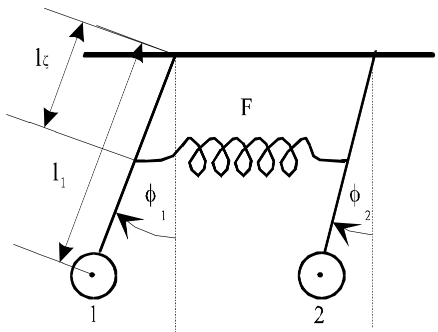
Amplitude A und Anfangsphase α sind die Integrationskonstanten des Problems.

Es ergibt sich so die bekannte Formel für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g}}.$$

2. **Kopplung zweier Pendel:**

Zwei einander gleiche Pendel werden durch eine Kopplungsfeder F verbunden. Die Feder wirkt auf beide Pendel, und zwar mit einem Drehmoment, das bei Gültigkeit des Hookschen Gesetzes der Differenz der beiden Auslenkungen proportional ist. Das gilt nur, solange die Feder gespannt wird.



In der vorliegenden Anordnung ist die Feder deshalb etwas vorgespannt, die Pendel hängen in der Ruhelage schräg einander zugeneigt. In der folgenden Ableitung werden die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 auf diese Ruhelage bezogen. Die Gesamtmomente, die auf die beiden Pendel wirken, sind

$$I_1\ddot{\phi}_1 = -D_1^*\phi_1 + D_f^*(\phi_2 - \phi_1)$$

$$I_2\ddot{\phi}_2 = -D_2\phi_2 - D_f^*(\phi_2 - \phi_1)$$

Die beiden Gleichungen sind *"* ***gekoppelte Differentialgleichungen*** *"*: jede enthält die beiden Variablen ϕ_1 und ϕ_2. Zur Lösung solcher Gleichungen versucht man immer, sie zu entkoppeln, also Gleichungen nur einer Variablen zu erhalten.

Da die beiden Pendel gleich sind $I_1 = I_2; D_1^* = D_2^* = D^*$, wobei D^* das durch die Gravitaion und D_f^* das durch die Feder hervorgerufene Direktionsmoment ist, gelingt das leicht durch Substitution mit neuen Variablen.

Addition der beiden Gleichungen liefert:

$$I\ddot{\varsigma} = -D^{*}\varsigma$$

und Substraktion:

$$I\ddot{\eta} = -D^{*}\eta - 2D_f^{*}\eta$$

mit der Substitution

$$\varsigma = \phi_2 + \phi_1 \qquad\qquad \eta = \phi_2 - \phi_1 .$$

Diese beiden Gleichungen sind nicht mehr gekoppelt. Sie haben die Lösungsfunktionen:

$$\varsigma = 2A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1)$$

$$\eta = 2A_2 \cos(\Omega_2 t - \Psi_2)$$

mit

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{D^{*}}{I}} \qquad\qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D^{*}}}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{D^{*} + 2D_f^{*}}{I}} \qquad\qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D^{*} + 2D_f^{*}}} .$$

A_1 und A_2 sind Amplituden, ψ_1 und ψ_2 Anfangsphasen.

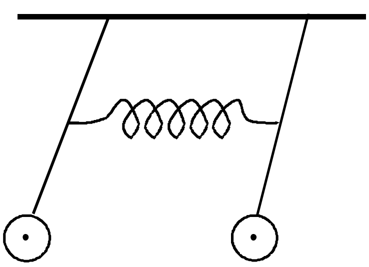
Dabei ist die Kreisfrequenz Ω_1 identisch mit ω. Die andere Kreisfrequenz Ω_2 ist nur wenig davon verschieden, wenn man voraussetzt, daß $D_f^{*} << D^{*}$, was bei der vorliegenden Apparatur erfüllt ist. Es ist immer $\Omega_2 > \Omega_1$. Macht man die Sustitution rückgängig, so erhält man für die Bewegung der beiden Pendel:

$$\phi_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \Psi_2)$$

$$\phi_2 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \Psi_2)$$

Dieses Gleichungsystem beschreibt die allgemeine Bewegung jedes der beiden Pendel. Beide kommen durch die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenz zustande. In welchen Anteilen und mit welchen Phasenlagen sie auftreten, ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Dabei lassen sich einige typischen Fälle unterscheiden:

Fall I



Die Anfangsbedingungen (Zustand zur Zeit t = 0) dieses Falles seien:

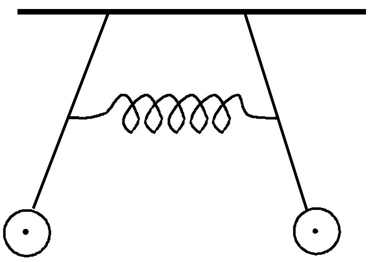
$$\phi_1 = \phi_2 = A, \qquad \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$$

Daraus folgt:

$A_1 = A$, $\psi_1 = 0$
A2 = A, ψ_2=unbestimmt

Experimentell wird dieser Fall verwirklicht, indem beide Pendel um den gleichen Winkel A ausgelenkt zur Zeit t = 0 losgelassen werden. Die Kopplung kommt experimentell nicht zur Geltung, da die Feder ihren Spannungs zustand nicht ändert. Frequenz und Schwingungsdauer entsprechen denen des Einzelpendels. Man spricht in diesem Fall von *symmetrischen Schwingungen*.

Fall II



Die Anfangsbedingungen seien:

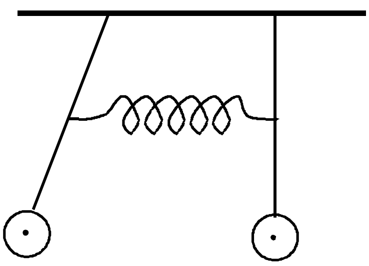
$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0\,,\quad ...\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$$

Für diesen Fall erhält man:

$A_1 = A$, Ψ_1 = unbestimmt
$A_2 = A$, ...$\Psi_2 = 0$

Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude A,die Schwingung des einen Pendels ist gegenüber der Schwingung des anderen um π phasenverschoben. Man nennt solche Schwingungen, bei denen $\phi_1 = -\phi_2$ ist, *antisymetrisch*.

Fall III



Die Anfangsbedingungen seien:

$$\phi_1 = 0\,,...\phi_2 = A\,,\quad \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$$

Daraus folgt dann:

$$A_1 = A_2 = A/2\,,\quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0$$

Damit werden die Gleichungen:

$$\phi_1 = \frac{A}{2}(\cos\Omega_1 t - \cos\Omega_2 t)\,,$$

$$\phi_2 = \frac{A}{2}(\cos\Omega_1 t + \cos\Omega_2 t)\,.$$

Indem die Summen der Cosinusfunktionen in Produkte umgewandelt werden, erhält man:

$$\phi_1 = A\cdot\sin\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}t\cdot\sin\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}t$$

$$\phi_2 = A\cdot\cos\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}t\cdot\cos\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}t$$

Experimentell ist dieser Fall verwirklicht, wenn man das Pendel 2 um einen Winkel A auslenkt, das Pendel 1 aber in der Ruhelage festhält, und nun beide Pendel zur Zeit t = 0 losläßt, ohne ihnen einen Anfangsimpuls zu erteilen. Die entstehende Schwingungsform ist eine typische Schwebung, die Mischung zweier Schwingungen wenig verschiedener Frequenz. Anfangs schwingt nur Pendel 2, allmählich wird durch die Kopplung Pendel 1 mitgezogen, dabei wird dem Pendel 2 Energie entzogen, bis schließlich nur noch Pendel 1 schwingt und Pendel 2 in Ruhe ist. Darauf beginnt dasselbe Spiel in umgekehrter Richtung.

Beide Pendel schwingen beinahe harmonisch mit der Frequenz $\Omega = (\Omega_2 + \Omega_1)/2$ und die Amplituden sind einer langsamen periodischen Änderung der Frequenz $\omega = (\Omega_2 - \Omega_1)/2 = 2\,\pi/\tau'$ unterworfen. Der Phasenunterschied zwischen den Bewegungen der Pendel ist $\pi/2$. Unter der Schwebungszeit τ versteht man die Zeit zwischen zwei Stillständen in der Ruhelage desselben Pendels.

Es ist:

$$\frac{r'}{2} = \frac{2\pi}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2} = \tau$$

τ entspricht dann der beobachteten Schwebungszeit.
Unter dem Kopplungsgrad χ versteht man das Verhältnis

$$\chi = \frac{D_f^*}{D^* + D_f^*}$$

χ kann Werte von 0 (keine Kopplung) bis 1 (starre Kopplung, $D_f^* >> D^*$) annehmen. Drückt man χ mit Hilfe der meßbaren Schwingungsdauern T_1 und T_2 aus, so ergibt sich

$$\chi = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} .$$

Beschreibung des Versuchsaufbaues

Die Apparatur besteht aus zwei durch eine Feder miteinander gekoppelten Pendeln. Die Pendel sind so justiert, daß die freie Schwingungsperiode ca. 1s beträgt. Die Masse einer Pendelscheibe beträgt 1000g. Die Pendelauslenkungen sollten etwa 5° nicht überschreiten.

Durchführung der Versuche

a) Das freie Pendel

1. Zunächst werden die Schwingungsperioden der nicht gekoppelten Pendel überprüft und nötigenfalls angeglichen.

2. Man bestimme den Radius der Pendelscheibe und berechne ihr Trägheitsmoment. Daraus soll mit Hilfe des Steinerschen Satzes die Pendellänge l_1 für eine 2-s Periode hergeleitet werden. Nun messe man die Länge l_1' (Pendelachse - Scheibenmittelpunkt) und diskutiere, ob bei der im Versuch erreichbaren Meßgenauigkeit die Vernachlässigung der Pendelstange bei der Berechnung des Trägheitsmomentes nach dem Steinerschen Satz gerechtfertigt erscheint.

3. Man bestimme die Länge l_0 eines mathematischen Pendels der Periode 2 s und beweise, daß l_0 immer größer sein muß als die Länge l_1 eines physikalischen Pendels.

b) Der symmetrische Fall

Koppeln Sie entsprechend Fall I die Pendel und lassen Sie sie mit gleicher Anfangsphase schwingen. Überzeugen Sie sich durch Messung, daß die Periode mit der eines einzelnen Pendels übereinstimmt.

c) Der antisymmetrische Fall

Lenken Sie entsprechend Fall II die beiden gekoppelten Pendel um denselben Winkel, jedoch in entgegengesetzter Richtung aus der Ruhelage aus und lassen Sie sie in Gegenphase schwingen. Bestimmen Sie die Periode T_2 und die Frequenz Ω in diesem antisymetrischen Fall.

d) Der Schwebungsfall

1. Entsprechend Fall III wird eines der Pendel aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt. Beobachten Sie den Schwebungsfall, den allmählichen Übergang der Schwingungsenergie von einem auf das andere Pendel. Messen Sie mit Hilfe der Stoppuhr die Schwebungszeit τ. Vergleichen Sie sie mit dem oben abgeleiteten Ausdruck.

2. Aus den Messungen zu m antisymmetrischen Fall konnten zwei der zur vollständigen Beschreibung der Bewegung nötigen Parameter ermittelt werden, nämlich T_2 und Ω_2. Die Schwebungszeit stellt dagegen keine unabhängige dritte Größe dar. Man benötigt also noch eine der anderen drei Größen. Dazu wird eine statische Bestimmung des Federrichtmomentes D_f^* ausgeführt:

   Die Feder wird an einem auf der linken Seite des Rahmens angebrachten Haken angehängt. Ihr freies Ende beschwert man mit einem Zusatzgewicht, dessen obere Kante als Bezugspunkt bei der Dehnungsmessung dient. Ermitteln Sie die Federkonstante K aus $\Delta F = K\ \Delta x$ mit Hilfe von zwei Gewichten (je 50g), wobei mehrere Messungen durchgeführt werden sollten.
   Die Feder lenkt ein Pendel um den Winkel ϕ aus. Sie übt somit ein Drehmoment M des Betrages $K \times l_f$ aus, worin l_f der Abstand der Pendelaufhängung vom Angriffspunkt der Feder ist und x deren lineare Ausdehnung. Bei kleinen Pendelauslenkungen gilt $x = l_f\,\phi$.

   Man erhält so das Richtmoment der Feder, D_f^*:

   $$D_f^* = \frac{M}{\phi} = K l_f^2$$

   Es folgt dann:

   $$D^* = 2D_f^* \frac{T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

   und

   $$I = 2D_f^* \frac{l}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}\ .$$

   Somit sind alle zur Beschreibung der Bewegung nötigen Parameter bekannt. Sie sollen tabellarisch dargestellt werden.

Alle Messungen sollen mehrfach durchgeführt werden (Fehlerbetrachtung).